МАТЕМАТИКА 10

АЛГЕБРА И ОСНОВЫ АНАЛИЗА
ГЕОМЕТРИЯ
ЧАСТЬ II

Учебник для 10 класса средних образовательных учреждений
и для учащихся среднего специальных,
профессиональных учебных заведений

ТАШКЕНТ
2017

УДК 51(075.32)
ББК 22.1ya721
М 54

Авторы раздела «Алгебра и начала анализа»:

Мирзаахмедов М.А., Исмаилов Ш.Н., Аманов А.К.

Автор раздела «Геометрия»:

Хайдаров Б.К.

Рецензенты:

Бешимов Б.К. – заведующий кафедрой «Геометрия и топология» Национального Университета Узбекистана им. Мирзо Улугбека, доктор физико-математических наук.

Пардаева М.Д. – заместитель директора Республиканского центра образования.

Давлетов Д.Е. – заведующий кафедрой «Методика преподавания математики» ТГПУ имени Низами, кандидат физико-математических наук, доцент.

Рахимов Г.М. – преподаватель академического лицея при ТИИИ и МСХ, кандидат физико-математических наук, доцент.

Акмалов А.А. – проректор Ташкентского городского ИПК и ППРНО, кандидат педагогических наук, доцент.

Аникина Е.В. – преподователь школы № 6 Сергелийского района города Ташкент.

Использованные в разделе «Алгебра и начала анализа» условные обозначения и пояснения к ним:

- △ – начало решения задачи (доказательства)
- ▲ – конец решения задачи (доказательства)
- (!) – контрольные работы и тестовые задания
- (?) – вопросы и задачи
- основная информация
- задачи повышенной трудности

Издано за счёт средств Республиканского целевого книжного фонда.

ISBN 978-9943-5056-7-4

ГЛАВА III

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ

47-49 ОТНОШЕНИЯ И ОТОБРАЖЕНИЯ. ФУНКЦИЯ

В нижеследующей таблице приведены размеры оплаты парковки автомобиля на автостоянке аэропорта города Нью-Йорка в зависимости от времени.

Видно, что размер оплаты непосредственно зависит от продолжительности времени.

Время (*t*)	Стоимость
0 − 1 час	\$5,00
1 − 2 час	\$9,00
2 − 3 час	\$11,00
3 − 6 час	\$13,00
6 − 9 час	\$18,00
9 − 12 час	\$22,00
12 − 24 час	\$28,00

Изучив эту таблицу, ответим на следующий вопрос:

Сколько нужно заплатить денег за один час стоянки одной автомашины: 5 долларов США, 9 долларов США или 11 долларов США?

Для наглядности сведения, приведенные в таблице изобразим в графическом виде. Запись вида «2–3 часа» в таблице понимается как «время более 2 часов, но не более 3 часов», т.е. как промежуток $2 < t \leqslant 3$. Получим следующую таблицу:

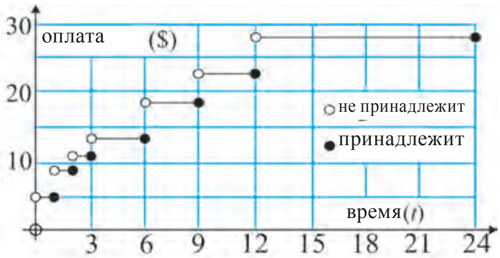
Время (*t*)	**Стоимость**
$0 < t \leqslant 1$ час	\$5,00
$1 < t \leqslant 2$ час	\$9,00
$2 < t \leqslant 3$ час	\$11,00
$3 < t \leqslant 6$ час	\$13,00
$6 < t \leqslant 9$ час	\$18,00
$9 < t \leqslant 12$ час	\$22,00
$12 < t \leqslant 24$ час	\$28,00

Данная таблица служит примером **отношения** двух переменных (времени и величины оплачиваемых денежных средств).

Отношение может быть истолковано как множество упорядоченных пар, например,

$\{(1, 5), (-2, 3), (4, 3), (1, 6)\}$.

Изменение размера суммы оплаты на автостоянке в зависимости от времени t из промежутка $0 < t \leqslant 24$ можно изобразить следующим образом:



Множество значений, принимаемых переменной, соответствующей горизонтальной оси, называется *областью определения* отношения.

В нашем случае множество $\{t|0<t\leqslant 24\}$ является областью определения отношения между *временем* и *величиной оплачиваемой суммы*. Также множество {– 2, 1, 4} является областью определения отношения {(1, 5), (– 2, 3), (4, 3), (1, 6)}.

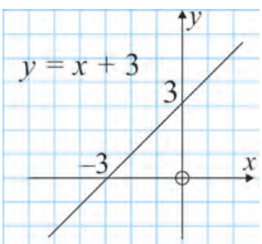
Совокупность значений, принимаемых переменной, соотвествующей вертикальной оси, называется *множеством значений* отношения.

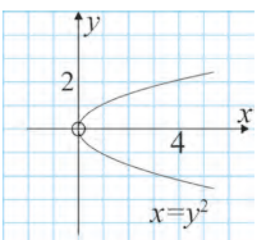
В нашем случае множество {5, 9, 11, 13, 18, 22, 28} является множеством значений отношения между *временем* и *оплаченной суммой*. Также множество {(1, 5), (–2, 3), (4, 3), (1, 6)} есть множество значений отношения.

Произвольное множество точек, заданных на Декартовой координатной плоскости, называется **отношением**. Отношение часто задается в виде равенства, связывающего **переменные** *x* и *y*.

Например, каждое из уравнений, $y=x+3$, $x=y^2$ задает некоторое отношение.

На декартовой координатной плоскости каждое из этих уравнений образует множество точек:

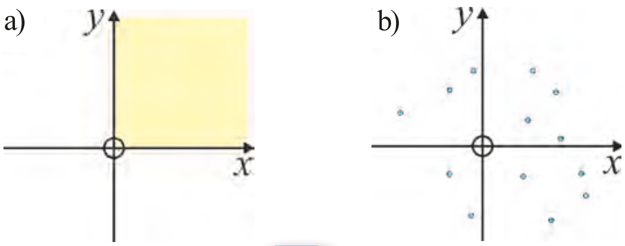




Отметим, что не все отношения можно записать с помощью равенства, связывающего переменные *x* и *y*.

Например, множество точек $(x,\ y)$, удовлетворяющих условия $x>0$, $y>0$ (первая четверть координатной плоскости, рис. a) или множество точек, изображенных на рис. b, невозможно описать с помощью уравнения $F(x,y)=0$.

a) b)



Отношение называется **отображением** или **функцией**, если в нем не существуют две различные точки с одинаковыми первыми координатами. Следовательно, функция есть специальный (особый) вид отношения.

Приведем два способа проверки, является ли заданное отношение функцией?

Алгебраический способ

Этот способ применяется в случаях задания отношения с помощью уравнений. Если подставить в заданное уравнение произвольные значения x и y, и при этом для каждого значения x получается единственное значение y, то данное отношение есть функция.

Например, если в уравнение $y=3x-2$ подставим произвольное значение x, то получим единственное значение y. Следовательно, отношение, заданное с помощью этого уравнения, является функцией.

Вместе с тем, отношение, заданное уравнением $x=y^2$, не является функцией, т.к. при подстановке значения $x=4$, получится два значения: $y=\pm 2$.

Графический способ

Пусть отношение задано в виде множества в Декартовой системе координат. Если при проведении всех возможных вертикальных прямых число точек пересечения произвольной из этих прямых с заданным отношением не больше одного, то данное отношение есть функция. И наоборот, если число точек пересечения некоторой вертикальной прямой с заданным отношением больше одного, то отношение не является функцией.

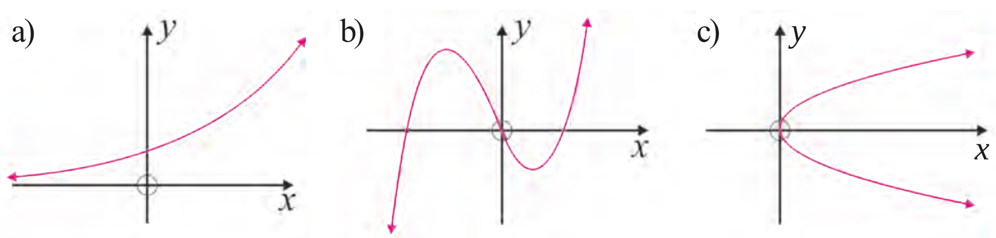
Условно примем следующие соглашения:

■ Если на линии обозначен малый кружок белого цвета, т.е. (—o—), то соответствующая точка не принадлежит линии.

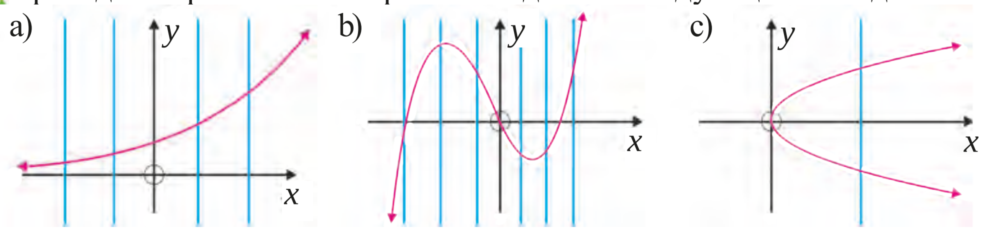
■ Если на линии обозначен кружок чёрного цвета, т.е. (—●—), то соответствующая точка принадлежит линии.

■ Стрелка $\longrightarrow$ означает, что такую линию можно продолжить бесконечно в указанном направлении.

Пример 1. Проверим, какие из отношений являются функцией:



Проведем вертикальные прямые и сделаем следующие выводы:



Каждое из отношений a) и b) является функцией, так как произвольная вертикальная прямая пересекается с ней не более, чем в одной точке; отношение c) не является функцией, так как существует вертикальная прямая, пересекающая отношение в двух точках.

Рассмотрим гипотетическое вычислительное устройство, работающее по следующему алгоритму:

Шаг 1. Вводится некоторое число.

Шаг 2. Введенное число умножается на 2.

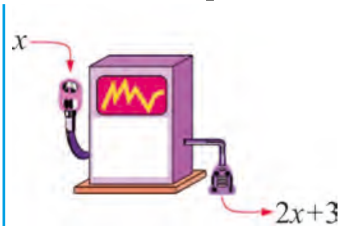
Шаг 3. К результату прибавляется число 3.

Например, если в устройство вводится число 4, то в результате получится число $4\cdot 2+3=11$.

В общем случае, если в устройство вводится число x, то в результате получится единственное число $2x+3$.

Это отношение – функция, и мы можем ее записать таким образом:

$f{:}x\mapsto 2x+3$, $f(x)=2x+3$ или $y=2x+3$



Если $f(x)=2x+3$, то значение, соответствующее числу – 4, будет найдено так: $f(-4)=2(-4)+3=-5$.

В общем случае, $f(x)$ – называется *значением функции* при заданном x и данное отношение записывается так: $y=f(x)$.

Пример 2. Найдите значения a) $f(5)$; b) $f(-4)$, если $f{:}x\mapsto 2x^2-3x$.

Подставив в отношение $f(x)=2x^2-3x$ числа $x=5$ и $x=-4$ находим соответствующие им значения: a) $f(5)=2\cdot 5^2-3\cdot 5=2\cdot 25-15=35$;

b) $f(-4)=2\cdot(-4)^2-3\cdot(-4)=2\cdot 16+12=44$.

Пример 3. Дано: $f(x)=5-x-x^2$. Найдите значения: a) $f(-x)$; b) $f(x+2)$ и упростите результаты.

a) $f(-x)=5-(-x)-(-x)^2=5+x-x^2$;

b) $f(x+2)=5-(x+2)-(x+2)^2=5-x-2-(x^2+4x+4)=3-x-x^2-4x-4=-x^2-5x-1$.

Вопросы и задания

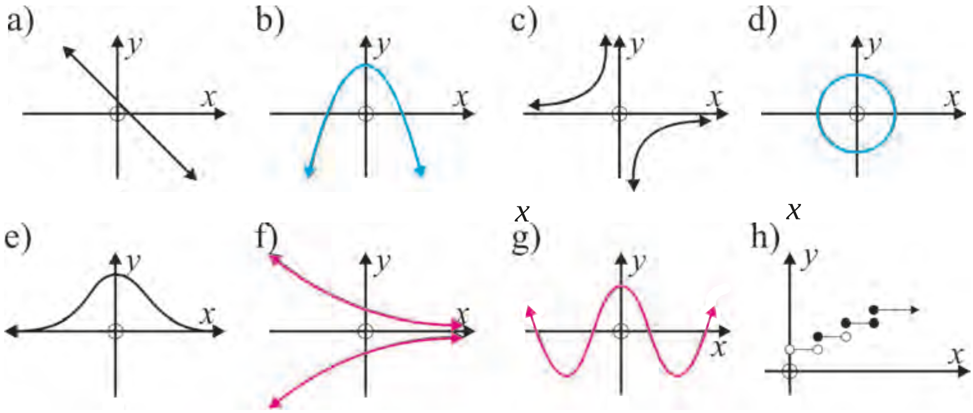
1. Приведите примеры отношений.
2. Дайте определение отображения или функции.
3. Поясните понятие области определения функции.
4. Поясните понятие области значений функции.

Упражнения

73. Какие из следующих отношений являются функцией:

a) $\{(1, 3), (2, 3), (3, 5), (4, 6)\}$;
b) $\{(1, 3), (3, 2), (1, 7), (-1, 4)\}$;
c) $\{(2, -1), (2, 0), (2, 3), (2, 11)\}$;
d) $\{(7, 6), (5, 6), (3, 6), (-4, 6)\}$;
e) $\{(0, 0), (1, 0), (3, 0), (5, 0)\}$;
f) $\{(0, 0), (0, -2), (0, 2), (0, 4)\}$?

74. Какие из следующих отношений являются функцией:



75. Является ли функцией любая (произвольная) прямая на декартовой координатной плоскости? Обоснуйте свой ответ.

76. Является ли функцией отношение, заданное уравнением $x^2+y^2=9$?

77. Найдите следующие значения, если $f{:}x\mapsto 3x+2$:

A) $f(0)$; B) $f(2)$; C) $f(-1)$; D) $f(-5)$; E) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$.

78. Найдите следующие значения, если $f{:}x\mapsto 3x-x^2+2$:

A) $f(0)$; B) $f(3)$; C) $f(-3)$; D) $f(-7)$; E) $f\left(\frac{2}{3}\right)$.

79. Найдите следующие значения, если $g : x \mapsto x-\frac{4}{x}$:

A) $g(1)$; B) $g(4)$; C) $g(-1)$; D) $g(-4)$; E) $g\left(-\frac{1}{2}\right)$.

80. Дано: $f(x)=7-3x$. Найдите следующие значения и упростите результаты:

a) $f(a)$; | b) $f(-a)$; | c) $f(a+3)$; | d) $f(b-1)$; | e) $f(x+2)$; | f) $f(x+h)$.

81. Если $F(x)=2x^2+3x-1$, то найдите следующие значения и упростите результаты.

a) $F(x+4)$; | b) $F(2-x)$; | c) $F(-x)$; | d) $F(x^2)$; | e) $F(x^2-1)$; | f) $F(x+h)$.

82. Дана функция: $G(x)=\dfrac{2x+3}{x-4}$:

a) Найдите: **I** $G(2)$, **II** $G(0)$, **III** $G\left(-\dfrac{1}{2}\right)$;

b) При каких x не существует $G(x)$?

c) Найдите $G(x+2)$ и упростите его;

d) Найдите все значения x, при которых $G(x)=-3$.

83. Пусть функция обозначена буквой f. Какое различие существует между смыслами обозначений f и $f(x)$?

84. Цена копировального устройства в результате износа за t лет убывает по закону $V(t)=9650-860t$.

a) Найдите $V(4)$ и объясните его смысл;

b) Найдите t при $V(t)=5780$. Объясните ситуацию;

c) По какой цене приобретено устройство?

85. На одной координатной плоскости начертите графики трёх разных функций, для которых $f(2)=1$, $f(5)=3$.

86. Найдите *линейную* функцию $f(x)=ax+b$, для которой $f(2)=1$ и $f(-3)=11$.

87. Найдите a, b, если $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}$, $f(1)=1$, $f(2)=5$.

88. Найдите *квадратную* функцию $T(x)=ax^2+bx+c$, если $T(0)=-4$, $T(1)=-2$, $T(2)=6$.

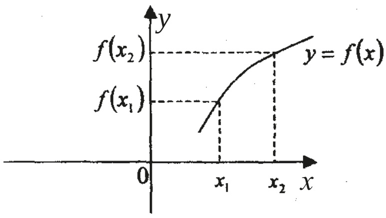
89. Пусть $f(x)=2^x$. Докажите равенства $f(a)f(b)=f(a+b)$.

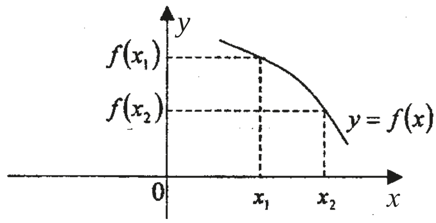
50-51 ПОНЯТИЯ МОНОТОННОСТИ, НАИМЕНЬШЕГО И НАИБОЛЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Монотонность функции

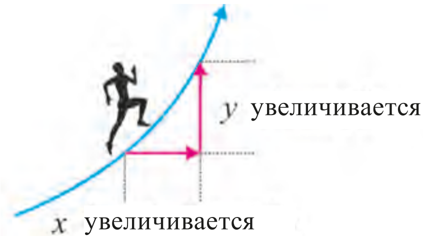
Если для всех $x_1, x_2 \in I$, удовлетворяющих неравенству $x_1<x_2$, справедливо неравенство $f(x_1)<f(x_2)$, то функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* функцией на промежутке I.

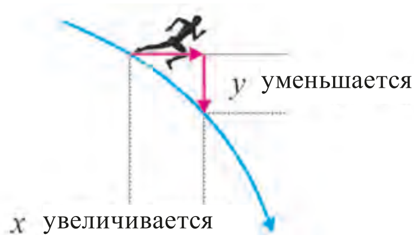
Если для всех x_1, $x_2 \in I$, удовлетворяющих неравенству $x_1<x_2$, справедливо неравенство $f(x_2)<f(x_1)$, то функция $y=f(x)$ называется *убывающей* на промежутке I.



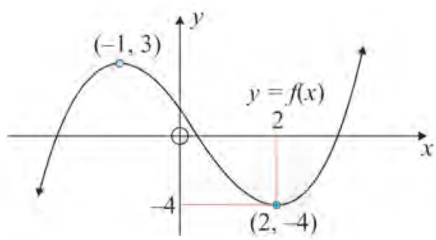


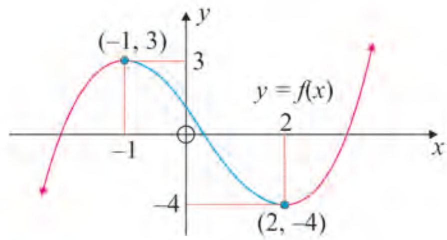
Если функция возрастающая, то при «движении» по графику в направлении слева направо ординаты увеличиваются; если функция убывающая, то ординаты уменьшаются.





Пример 1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:



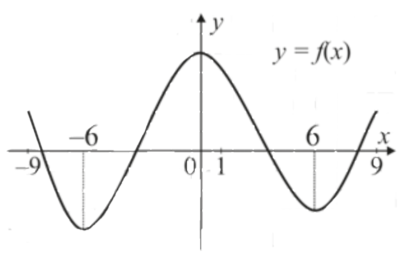


△Если функция возрастающая, то при движении нами в направлении слева направо ординаты возрастают (в графике выделены красным цветом). Следовательно, в промежутках $x \leqslant -1$ и $x \geqslant 2$ функция возрастает. Ответ можно написать также в виде $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$.

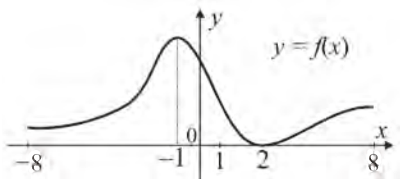
Точно так же, если функция убывающая, то при движении нами в направлении слева направо ординаты убывают (в графике выделены синим цветом). Следовательно, функция в промежутке $-1 \leqslant x \leqslant 2$ убывает. ▲

Пример 2. На каких промежутках функция, заданная на промежутке [−9; 9] возрастает? (см. рис.)

△При движении нами в направлении слева направо ординаты увеличиваются. Следовательно, функция возрастает на промежутках $[-6;0]$ и $[6;9]$. Ответ можно написать также в виде $[-6;0] \cup [6;9]$. ▲

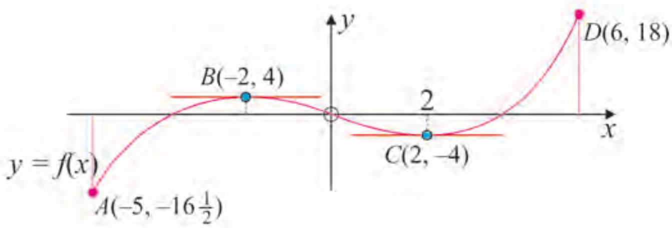


Пример 3. На каких промежутках функция убывает? (см. рис.)



△При движении нами в направлении слева направо ординаты уменьшаются. Следовательно, функция убывает в промежутке $[-1;\ 2]$.▲

Теперь ознакомимся с понятиями наибольшего и наименьшего значений функции. Рассмотрим график функции, определенной на промежутке $-5 \leqslant x \leqslant 6$.



Ввиду того, что ордината точки *A* меньше ординат других точек, эта точка называется **точкой глобального минимума.** Соответствующее ей значение функции называется **наименьшим значением функции.** В нашем примере наименьшее значение функции равно – 16,5.

Точно так же, ввиду того, что ордината точки *D* больше ординат остальных точек, данная точка называется **точкой глобального максимума.** Соответствующее этой точке значение функции называется **наибольшим значением функции.** *В* нашем примере наибольшее значение функции равно 18.

Теперь обратим внимание на точку *B*. Множество точек графика, близких к этой точке, имеют форму  Точка, обладающая таким свойством, называется **точкой локального максимума.**

Точно так же, множество точек графика, близких к точке *C*, имеет форму: 

Точка обладающая таким свойством, называется **точкой локального минимума**.

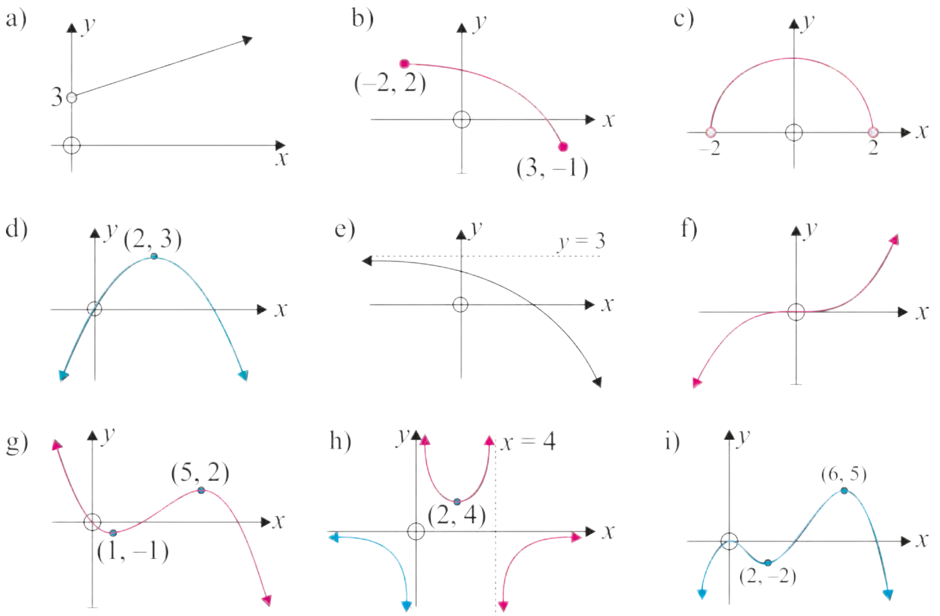
Приведём пример функции, обладающей только локальным максимумом и локальным минимумом:

Вопросы и задания

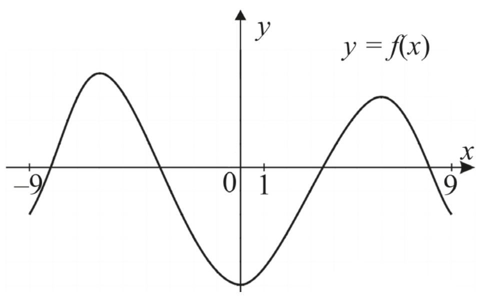
1. Дайте определение функции, возрастающей на заданном промежутке.
2. Дайте определение функции, убывающей на заданном промежутке.
3. Как определяется возрастание функции по чертежу?
4. Как определяется убывание функции по чертежу?

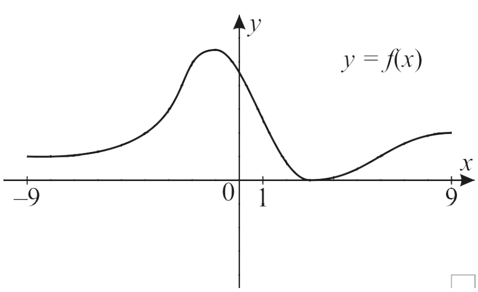
Упражнения

90. Определите следующие промежутки для функции: I) возрастания; II) убывания. Если возможно, то найдите локальный максимум и локальный минимум, наибольшее и наименьшее значения.



91. Пусть функции заданы на промежутке [–9; 9]. (см. рис.) В каких промежутках она возрастает? В каких промежутках она убывает? Найдите её локальный максимум и локальный минимум, наибольшее и наименьшее значения:



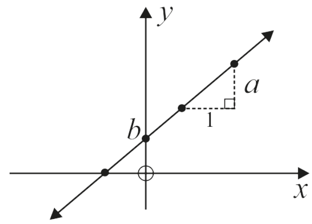


52-54 ЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Линейная функция

Функция вида $f(x)=ax+b$ называется *линейной функцией*, где x, y – переменные, a, b – заданные числа, $a\neq 0$.

График линейной функции на координатной плоскости представляет собой прямую линию, а число a называется ее *угловым коэффициентом*.



Ниже приведены некоторые приложения линейной функции.

Пример 1. Стоимость аренды теннисного корта установлена по формуле $C(h)=5h+8$ (долларов США), где h – время аренды (в часах). Какие средства расходуются на аренду за 4 часа, за 10 часов?

△ Воспользовавшись формулой $C(h)=5h+8$, находим $C(4)=5\cdot 4+8=20+8=28$ и $C(10)=5\cdot 10+8=50+8=58$. Следовательно, за 4 часа аренды нужно выплатить 28 долларов США, а за 10 часов аренды – 58 долларов США. ▲

Пример 2. В городе Нью-Йорке таксист за посадку пассажира берёт 3 доллара 30 центов США, а за каждый километр проезда 1 доллар 75 центов США.

a) Перепишите таблицу в свою тетрадь и заполните её:

d – расстояние (км)	0	2	4	6	8	10
C – средства ($)						

b) Изобразите в графическом виде зависимость между C и d;

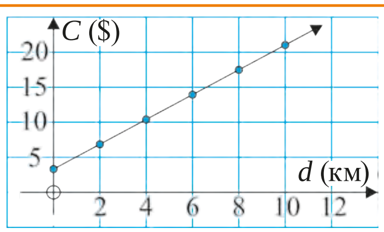
c) Напишите алгебраическое выражение – формулу для функции $C(d)$;

d) Сколько денег нужно заплатить за проезд 9,4 км?

△ a) Заполним клетки таблицы, последовательно прибавляя к 3,3 долларов США $2\cdot 1{,}75=3{,}5$ долларов США:

d – расстояние (км)	0	2	4	6	8	10
C – средства ($)	3,30	6,80	10,30	13,80	17,30	20,80

b)



Это линейная функция.

c) Находим угловой коэффициент:

$$a=\frac{20{,}80-17{,}30}{10-8}=1{,}75.$$

Следовательно, $C(d)=1{,}75d+3{,}3$.

d) $C(9{,}4)=1{,}75\cdot 9{,}4+3{,}3=19{,}75$.

Итак, за проезд 9,4 км нужно заплатить 19,75 долларов США. ▲

Квадратичная функция

Функция вида $y=ax^2+bx+c$ называется *квадратичной функцией*, где x, y – переменные, a, b, c – заданные числа , $a\neq 0$.

Найдем значения квадратичной функции $y=2x^2+4x-5$ в точках: a) $x=0$; b) $x=3$.

a) Пусть $x=0$. Тогда $y=2\cdot 0^2+4\cdot 0-5=0+0-5=-5$.

b) Пусть $x=3$. Тогда $y=2\cdot 3^2+4\cdot 3-5=18+12-5=25$.

Пример 3. Пусть при бросании камня высота его полёта по отношению к земле на t секунде определяется функцией $h(t)=-5t^2+30t+2$.

a) На какой высоте от земли находится камень при $t=3$?

b) С какой высоты бросили камень?

c) В какое время камень находится на высоте 27 метров?

△ a) $h(3)=-5\cdot 3^2+30\cdot 3+2=-45+90+2=47$. Следовательно, брошенный камень через 3 секунды будет находиться на высоте 47 метров.

b) Так как камень брошен в момент времени $t=0$, то $h(0)=-5\cdot 0^2+30\cdot 0+2=2$. Следовательно, камень брошен с высоты в 2 метра.

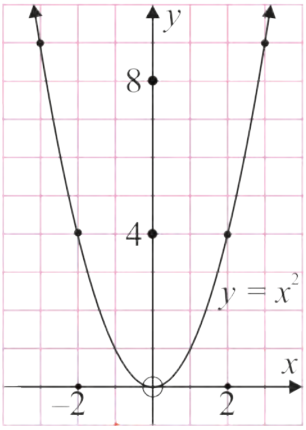
c) Если камень находится на высоте 27 метров от земли, то $h(t)=27$ т.е. $-5t^2+30t+2=27$. Решим данное уравнение: $-5t^2+30t-25=0$, $t^2-6t+5=0$, $t_1=1$, $t_2=5$. Итак, камень находится на высоте 27 метров через 1 секунду (при подъёме на высоту) и через 5 секунд (при падении). ▲

График квадратичной функции.

Рассмотрим функцию $f(x)=x^2$. Составим таблицу её значений в некоторых точках:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

Построив в координатной плоскости точки (x, y) из этой таблицы и соединив их плавной линией, получим следующую кривую:



Полученная кривая называется **параболой**. Как видно из рисунка, парабола есть кривая, ветви которой направлены вверх и симметричны относительно оси ординат.

Точка (0; 0) называется вершиной параболы $y=x^2$.

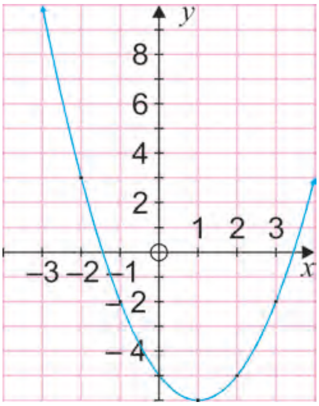
Пример 4. Постройте график квадратичной функции $y=x^2-2x-5$.

△ Находим значения функции в некоторой точке, например, в точке $x=-3$:
$f(-3)=(-3)^2-2(-3)-5=9+6-5=10$.

Вычислив в нескольких точках значения функции, составим таблицу:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	10	3	-2	-5	-6	-5	-2

Построив в координатной плоскости точек (x, y) и соединив их плавной линией, получим график квадратичной функции.



Построенный график также имеет вид параболы, а его ветви направлены вверх.

Найдём точку пересечения произвольной параболы $y=ax^2+bx+c$ с осью ординат Oy:

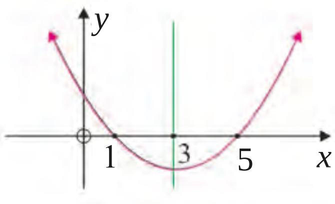
$x=0$, $y=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=0+0+c=c$.

Следовательно, парабола пересекается с осью ординат в точке $(0, c)$. Для нахождения точек пересечения параболы $y=ax^2+bx+c$ с осью абсцисс достаточно найти решения квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Например, найдем точки пересечения параболы $y=x^2-2x-15$ с осью абсцисс. Предположив, что $x^2-2x-15=0$, решим данное квадратное уравнение. Его решения: $x=-3$ и $x=5$. Следовательно, парабола $y=x^2-2x-15$ пересекается с осью абсцисс в точках $(-3, 0)$, $(5, 0)$.

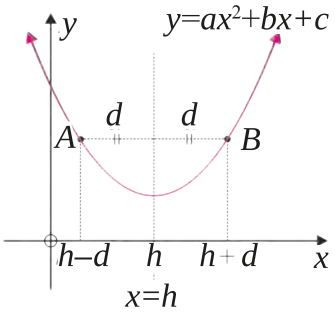
Для параболы $y=ax^2+bx+c$ вертикальная прямая вида $x=h$ является её *осью симметрии*. Если парабола пересекается с осью абсцисс, то число h равно среднему арифметическому абсцисс точек пересечения параболы с осью Ox.

Пример 5. Найдите ось симметрии параболы, изображенной на рисунке.



Если парабола пересекается с осью абсцисс в точках $(1, 0)$ и $(5, 0)$ то, $x=\dfrac{5+1}{2}=3$ – *ось симметрии*.

Если парабола $y=ax^2+bx+c$ не пересекается с осью абсцисс, то число h можно найти и по другому способу.



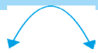
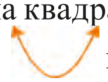
Как видно, точки A и B с абсциссами $h-d$ и $h+d$ имеют одинаковые ординаты, т.е. $f(h-d)=f(h+d)$. Следовательно, точки A и B симметричны относительно оси $x=h$.

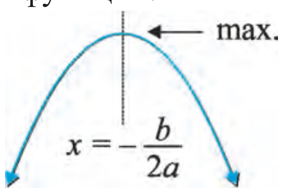
Пользуясь этим условием, из нижеследующего равенства находим h:

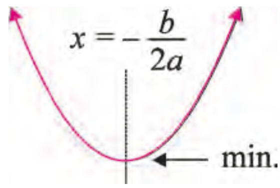
$a(h-d)^2+b(h-d)+c=a(h+d)^2+b(h+d)+c$, или

$a(h^2-2hd+d^2)+bh-bd=a(h^2-2hd+d^2)+bh+bd$, или $-4ahd=2bd$, отсюда $h=\frac{-b}{2a}$. Следовательно, $x=\frac{-b}{2a}$ есть ось симметрии.

Вывод. Уравнение оси симметрии параболы $y=ax^2+bx+c$ имеет вид $x=\frac{-b}{2a}$. Точка параболы, симметричная самой себе, называется вершиной параболы. Координаты вершины параболы: $x=\frac{-b}{2a}$, $y=0$. Ось параболы проходит через точку $(-\frac{b}{2a},0)$ параллельно оси Oy. Поскольку вершина параболы принадлежит оси симметрии, её абсцисса равна $-\frac{b}{2a}$.

Очевидно, что при $a<0$ форма параболы имеет вид  и её вершина является точкой максимума квадратной функции $y=ax^2+bx+c$, а при $a>0$ форма параболы имеет вид  и её вершина является точкой минимума квадратной функции.





Пример 6. Найдите ось симметрии параболы $y=3x^2+4x-5$.

$\triangle$ $y=3x^2+4x-5$ $a=3$, $b=4$.

Следовательно, $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2\cdot 3}=-\frac{2}{3}$, т.е. $x=-\frac{2}{3}$ – ось симметрии. $\blacktriangle$

Пример 7. Найдите вершину параболы $f(x)=x^2+6x+4$.

$\triangle$ $a=1$, $b=6$. $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{2\cdot 1}=-3$.

Следовательно, абсцисса вершины параболы $x=-3$,

а её ордината: $y=f(-3)=(-3)^2+6(-3)+4=9-18+4=-5$.

Поэтому вершина параболы имеет координаты $(-3,-5)$. $\blacktriangle$

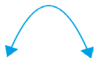
Пример 8. Спортсмен бросил мяч вверх, при этом высота мяча через t секунд равна $H(t)=30t-5t^2$ метров, $t\geqslant 0$.

a) Через сколько секунд мяч достигнет наивысшей точки?

b) На какой высоте от земли находится наивысшая точка?

c) Через сколько секунд мяч упадет на землю?

a) Для $H(t)=30t-5t^2$ имеем: $a<0$, $a=-5$. Поэтому эта парабола имеет

форму: . Через $t=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-30}{2\cdot(-5)}=3$ секунд достигается максимум.

Т. е. через 3 секунды мяч поднимется на наибольшую высоту.

b) Найдем наибольшую высоту:

$H(3)=30\cdot3-5\cdot3^2=90-45=45$, т.е. наивысшая точка находится на высоте 45 метров от поверхности земли.

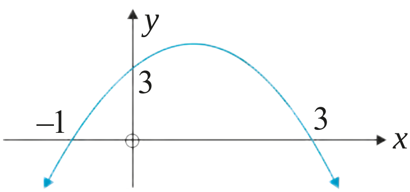
c) При $H(t)=0$ мяч упадет на землю. Решим это уравнение:

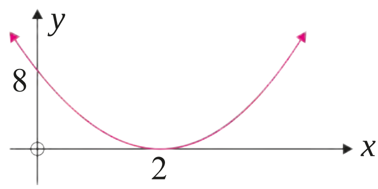
$30t-5t^2=0$, $5t^2-30t=0$, $5t(t-6)=0$. Отсюда $t_1=0$ или $t_2=6$.

Итак, через 6 секунд мяч упадет на землю.

Ниже мы приведем примеры на нахождение квадратичной функции по виду параболы.

Пример 9. Напишите явный вид квадратичной функции, заданной графически:

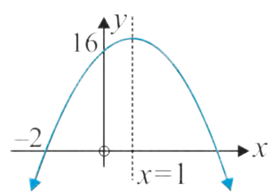
a) 

b) 

a) Ветви параболы направлены вниз, она пересекается с осью абсцисс в точках -1 и 3. Поэтому $y=a(x+1)(x-3)$, $a<0$. Из условия $y=3$ при $x=0$ находим $a=-1$. Следовательно, квадратичная функция выражается формулой $y=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$.

b) Ветви параболы направлены вверх, она касается оси абсцисс в точке $x=2$. Поэтому $y=a(x-2)^2$, $a>0$. Из условия, $y=8$ при $x=0$ находим $a=2$. Следовательно, квадратная функция выражается формулой $y=2(x-2)^2$.

Пример 10. По заданной параболе найдите явный вид квадратной функции.



Так как $x=1$ – есть ось симметрии, то её вторая точка пересечения с осью абсцисс равна $x=4$. Следовательно, $y=a(x+2)(x-4)$. Поэтому $x=0$, $y=16$. Отсюда $16=a(0+2)(0-4)$. Значит, $a=-2$, то есть $y=-2(x+2)\cdot(x-4)=-2x^2+4x+16$.

Вопросы и задания

1. Дайте определение линейной функции?
2. Дайте определение углового коэффициента линейной функции?
3. Дайте определение квадратичной функции?

4. Как находится вершина квадратичной функции?
5. Когда квадратичная функция имеет максимум?
6. Когда квадратичная функция имеет минимум?

Упражнения

92. Из-за износа стоимость автомашины изменяется по закону $V(t)=25000-3000t$ евро, здесь t (лет) – время экплуатации.

a) Найдите значение $V(0)$. Объясните смысл этого значения;

b) Найдите значение $V(3)$. Объясните смысл этого значения;

c) Через сколько лет автомашина будет стоить 10000 евро?

93. В США электромонтажник за вызов получает \$60, а за каждый час работы получает \$45.

a) Составьте соответствующую таблицу при $t=0, 1, 2, 3, 4, 5$.

b) Изобразите графически зависимость оплаты услуг C от времени t.

c) Напишите явный вид функции $C(t)$.

d) Сколько средств нужно выплатить за $6\frac{1}{2}$ часов работы?

94. Цистерна объемом 265 л заполнена водой. В результате повреждения каждую минуту из неё вытекает 11 литров воды.

a) Составьте таблицу, выражающую зависимость объема вытекающей воды V л от времени t (минут) при $t=0, 1, 2, 3, 4, 5$.

b) Зависимость $V(t)$ изобразите в виде графика;

c) Напишите явный вид функции $V(t)$;

d) Сколько литров воды останется в цистерне через 15 минут?

e) За какое время цистерна опустеет?

95. Какие из следующих выражений являются квадратичной функцией:

a) $y=2x^2-4x+10$;
b) $y=15x-8$;
c) $y=-2x^2$;
d) $y=\frac{1}{3}x^2+6$;
e) $3y+2x^2-7=0$;
f) $y=15x^3+2x-16$?

96. Состоит ли пара (x, y) в отношении, выраженном через квадратичную функцию $y=ax^2+bx+c$?

a) $f(x)=6x^2-10$, $(0, 4)$;
b) $y=2x^2-5x-3$, $(4, 9)$;
c) $y=-4x^2+6x$, $(-\frac{1}{2}, -4)$;
d) $y=-7x^2+9x+11$, $(-1, -6)$;
e) $f(x)=3x^2-11x+20$, $(2, -10)$;
f) $f(x)=-3x^2+x+6$, $(\frac{1}{3}, 4)$?

97. Для квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ найдите значение x, соответствующее заданному значению y:

a) $y=x^2+6x+10$, $y=1$; c) $y=x^2-5x+1$, $y=-3$;
b) $y=x^2+5x+8$, $y=2$; d) $y=3x^2$, $y=-3$.

98. Материальное тело брошено вверх со скоростью 80 м/сек. Его высота по отношению к земле через t секунд определяется с помощью функции $h(t)=80t-5t^2$.

a) Найдите высоту тела через 1 секунду; 3 секунды; 4 секунды;
b) Через какое время тело будет на высоте 140 метров? 0 метров? Объясните ситуации, соответствующие ответам.

99. Доход производителя продукции вычисляется по следующей формуле:

$P(x)=-\frac{1}{2}x^2+36x-40$ (тысяч сумов), где x – количество продукции.

a) Какой доход имеет производитель при производстве 0 единиц продукции, 20 единиц продукции? b) Сколько продукции должно быть произведено, чтобы получить 270 тысяч сумов дохода?

100. Найдите значения функции, соответствующие значениям $x=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$.

a) $y=x^2+2x-2$; d) $f(x)=-x^2+x+2$; g) $y=x^2-5x+6$;
b) $y=x^2-3$; e) $y=x^2-4x+4$; h) $y=x^2+x+1$;
c) $y=x^2-2x$; f) $f(x)=-2x^2+3x+10$; i) $y=-x^2+x-1$.

Результаты дайте в табличной форме и постройте графики. Какую вид имеют данные графики?

101. Найдите точку пересечения парабол с осью ординат:

a) $y=x^2+2x+3$; d) $f(x)=3x^2-10x+1$; g) $y=8-x-2x^2$;
b) $y=2x^2+5x-1$; e) $y=3x^2+5$; h) $f(x)=2x^2-x^2-5$;
c) $y=-x^2-3x-4$; f) $y=4x^2-x$; i) $y=6x^2+2-5x$.

102. В каких точках пересекаются графики функций с осью ординат:

a) $y=(x+1)(x+3)$; d) $y=(2x+5)(3-x)$; g) $y=(x-1)(x-6)$;
b) $y=(x-2)(x+3)$; e) $y=\ x(x-4)$; h) $y=-(x+2)(x+4)$;
c) $y=(x-7)^2$; f) $y=-(x+4)(x-5)$; i) $y=-(x-3)(x-4)$?

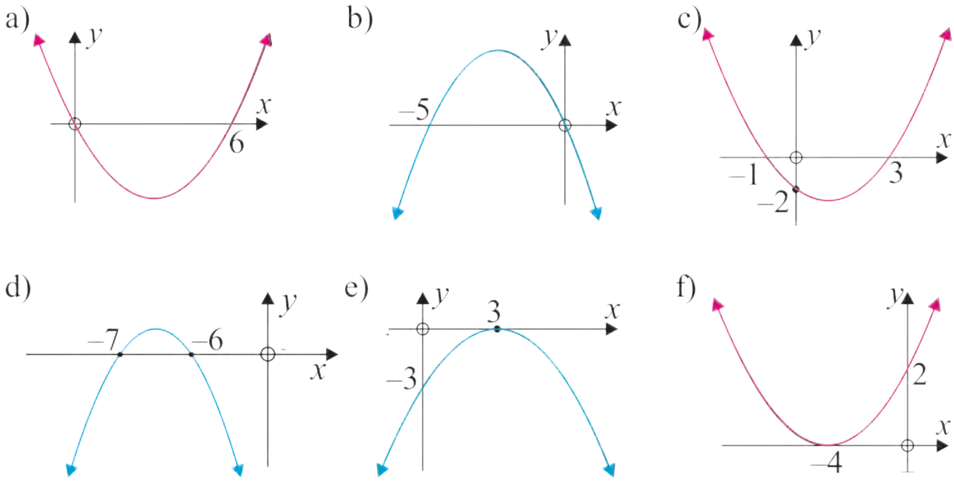
103. Найдите точки пересечения параболы с осью абсцисс:

a) $y=x^2-x-6$; d) $y=3x-x^2$; g) $y=-x^2-4x+21$; j) $y=-2x^2+x-5$;
b) $y=x^2-16$; e) $y=x^2-12x+36$; h) $y=2x^2-20x+50$; k) $y=-6x^2+x+5$;
c) $y=x^2+5$; f) $y=x^2+x-7$; i) $y=2x^2-7x-15$; l) $y=3x^2+x-1$.

104. Найдите точки пересечения параболы с осью ординат:

a) $y=x^2+x-2$; г) $y=x^2+x+4$; g) $y=-x^2-7x$; j) $y=-x^2+2x-9$;
b) $y=(x+3)^2$; e) $y=3x^2-3x-36$; h) $y=-2x^2+3x+7$; k) $y=4x^2-4x-3$;
c) $y=(x+5)(x-2)$; f) $y=-x^2-8x-16$; i) $y=2x^2-18$; l) $y=6x^2-11x-10$.

105. Найдите ось симметрии параболы:



106. Найдите ось симметрии параболы:

a) $y=(x-2)(x-6)$;

b) $y=x(x+4)$;

c) $y=-(x+3)(x-5)$;

d) $y=(x-3)(x-8)$;

e) $y=2(x-5)^2$;

f) $y=3(x+2)^2$.

107. Найдите ось симметрии параболы:

a) $y=x^2+6x+2$;

b) $y=x^2-8x-1$;

c) $f(x)=2x^2+5x-3$;

d) $y=-x^2+3x-7$;

e) $y=2x^2-5$;

f) $y=-5x^2+7x$;

g) $f(x)=x^2-6x+9$;

h) $y=10x-3x^2$;

i) $y=\frac{1}{8}x^2+x-1$.

108. Найдите координаты вершины параболы:

a) $y=x^2-4x+7$;

b) $y=x^2+2x+5$;

c) $f(x)=-x^2+6x-1$;

d) $y=x^2+3$;

e) $f(x)=2x^2+12x$;

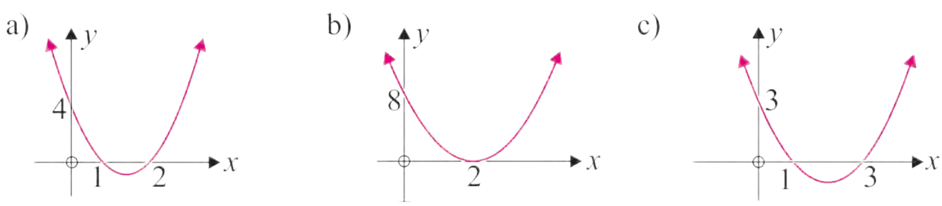
f) $y=-3x^2+6x-4$;

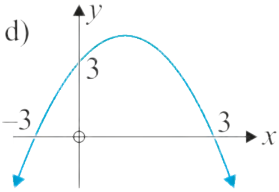
g) $y=x^2-x-1$;

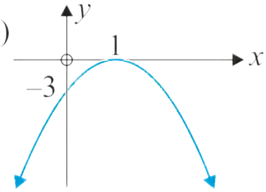
h) $y=-2x^2+3x-2$;

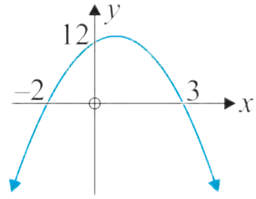
i) $y=-\frac{1}{4}x^2+3x-2$.

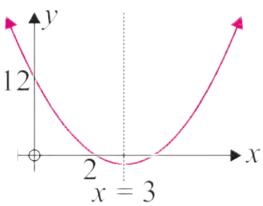
109. По заданной параболе найдите соответствующую ей квадратичную функцию **(109–110)**:

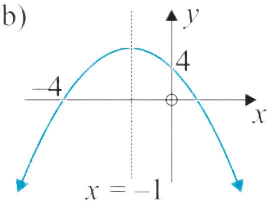


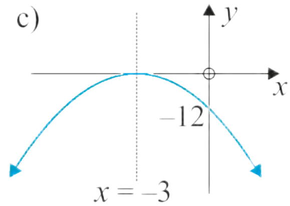
d)


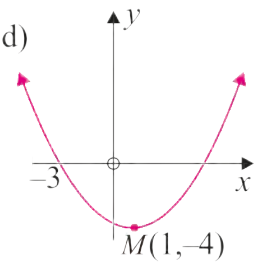
e)


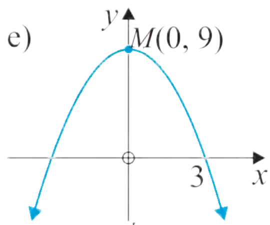
f)


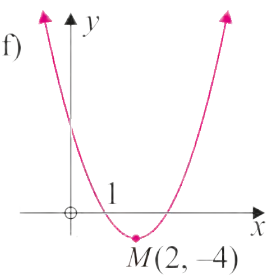
110. a)


b)


c)


d)


e)


f)


111. Дильшод нырнул в море за жемчугом. Глубина его погружения за t секунд равна $H(t)=-4t^2+4t+3$ метров, $t \geqslant 0$.

a) На какой глубине находится жемчуг?

b) Сколько времени потребуется Дильшоду для сбора жемчуга?

c) С какой высоты нырнул в море Дильшод?

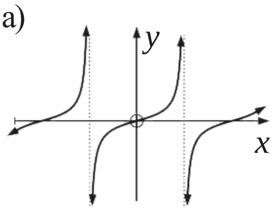
112. Жасмина получила заказ на пошив платьев. Если она за день шьет x платьев, то получает прибыль в $P(x)=-x^2+20x$ долларов США.

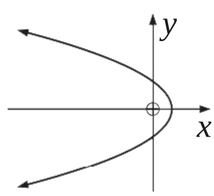
a) Сколько платьев она должна сшить, чтобы получить наибольшую прибыль?

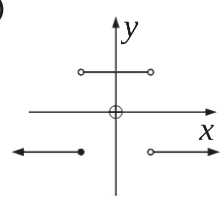
b) Сколько долларов составит наибольшая прибыль?

Образец контрольной работы

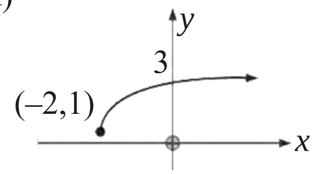
1. Какие из следующих отношений являются функцией?

a)


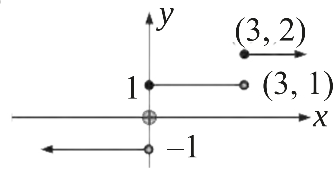
b)


c)


d)



e)

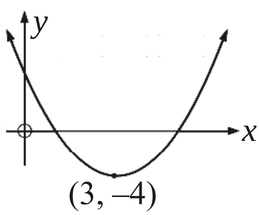


2. Какие из следующих множеств упорядоченных пар являются отображением? Обоснуйте свой ответ.

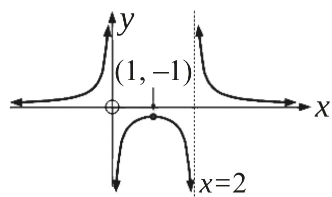
a) $\{(1, 2),(-1, 2),(0, 5),(2, -7)\}$; b) $\{(0, 1),(1, 3),(2, 5),(0, 7)\}$;
c) $\{(6, 1),(6, 2),(6, 3),(6, 4)\}$.

3. Найдите область определения и множество значений функций, заданных в графическом виде:

a)

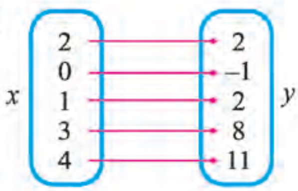


b)

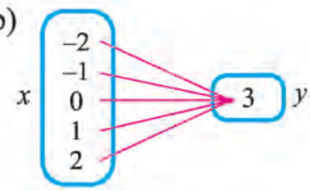


4. Нижеследующая диаграмма задает отображение $y=f(x)$:

a)



b)



1) Напишите область определения и множество значений отношения $y=f(x)$.

2) Как изображается отображение $y=f(x)$ в Декартовой координатной системе?

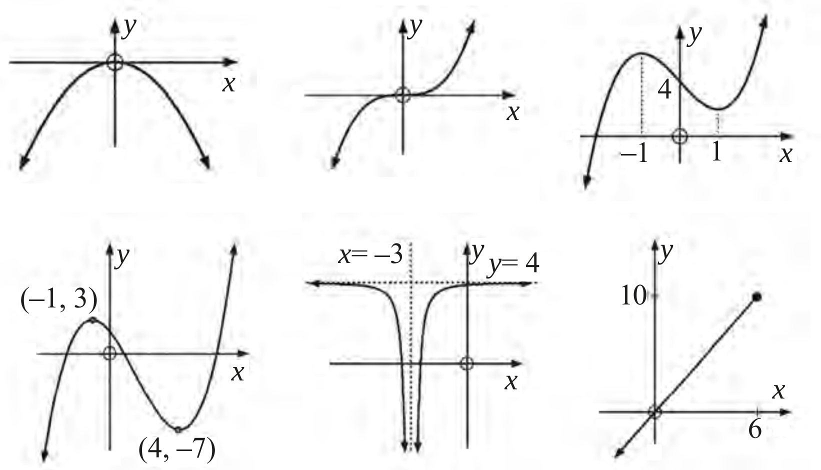
3) Для $y=f(x)$ напишите точное выражение.

5. Для функции $f(x)=2x-x^2$ найдите значения:

a) $f(2)$; b) $f(-3)$; c) $f(-\frac{1}{2})$.

6. Найдите и упростите выражения для функции $g(x)=x^2-3x$:
a) $g(x+1)$; b) $g(x^2-2)$.

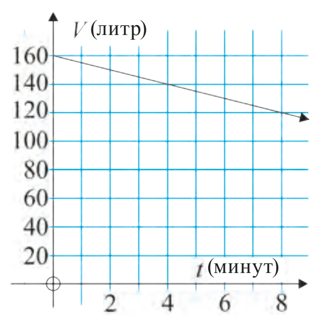
7. Найдите промежутки убывания и возрастания функций, заданных графически:



8. Для функций: a) $f(x)=2x+1$; b) $f(x)=-3x+2$;
c) $f(x)=x^2$; d) $f(x)=-x^3$

1) Найдите точки пересечения функций с осями:
2) Найдите координаты точек локального максимума, локального минимума.
3) Постройте схематически графики этих функций.

9. На рисунке изображена зависимость объема V вытекаемой из цистерны нефти за время t, выраженное в минутах.

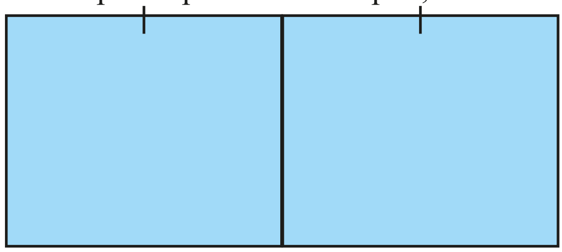


1) Найдите формулу зависимости объема от времени.
2) Сколько нефти вытечет за 15 минут?
3) За сколько минут вытечет 50 литров нефти?
4) Через какое время цистерна опустеет?

10. Камень брошен вверх с высоты 60 метров над уровнем моря. Через t секунд высота камня над уровнем моря равна $H(t)=-5t^2+20t+60$ метров.
1) Через сколько секунд высота камня будет наибольшей?
2) Чему равна наибольшая высота камня над уровнем моря?
3) Через сколько секунд камень упадет в воду?

11. Фермер оградил два поля одинаковой площади и расположенных рядом со стеной периметром 2000 метров, как показано на рисунке.

x м



1) Как выражается через x суммарная площадь полей?
2) Сколько квадратных метров может составлять наибольшая площадь двух полей? Определите размеры таких полей.

55 ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ И НАБЛЮДЕНИЕ ЗА НИМИ

Периодические процессы широко распространены в природе и в технике. Приведем примеры периодических процессов:

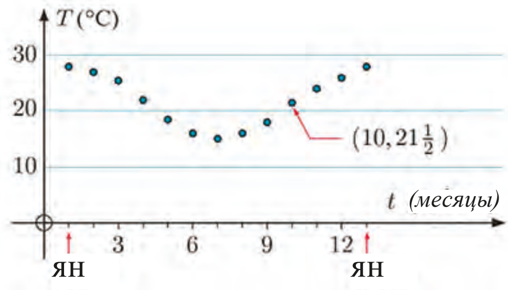
- изменение погоды в течение года;
- изменение средней температуры по месяцам;
- продолжительность дня и ночи;
- глубина воды у берега моря;
- число животных в ареале их обитания;
- изменение активности солнца;
- периодические колебания в механике, в электротехнике.

В этих процессах в определенные промежутки времени наблюдаются повторяющиеся ситуации. В зависимости от ситуации, они называются *периодическими, колебательными или циклическими*.

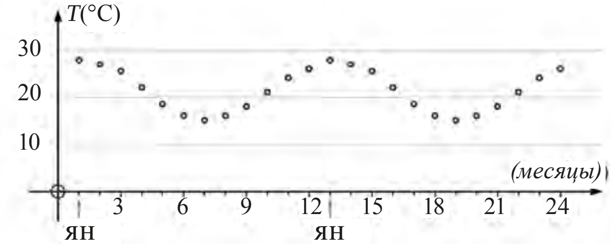
Рассмотрим таблицу, выражающую изменение максимальной месячной температуры в городе Кейптаун (ЮАР):

Месяц	Ян	Фев	Мар	Апр	Май	Июн	Июл	Авг	Сен	Окт	Ноя	Дек
Темп (°C)	28	27	$25\frac{1}{2}$	22	$18\frac{1}{2}$	16	15	16	18	$21\frac{1}{2}$	24	26

Выразим эти сведения графически. Пусть ось ординат означает температуру, а ось абсцисс – порядковый номер месяца (например, для месяца февраль $t=2$). (см. рис.). Так как средняя температура в январе равна 28° С, естественно предположить повторение этого значения в январе каждого года, то есть с *периодичностью* в 12 месяцев.



Вообще говоря, рассуждая аналогичным образом, получим график, приближенно отражающий изменения средней температуры по месяцам и в последующие годы.



Отметим, что если функция $y=f(t)$ описывает среднюю температуру за месяц t, то имеем: $f(1)=f(13)=f(25)=\ldots$ $f(0)=f(12)=f(24)=\ldots$. В общем случае для произвольного t будет $f\ (t+12)=\ f(t)$.

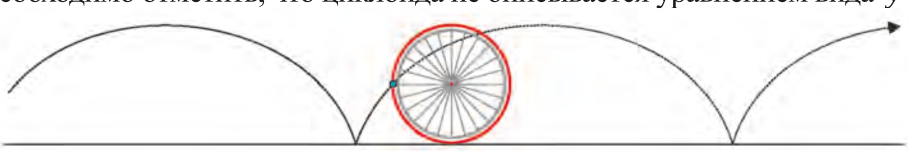
При этом срок в 12 месяцев, в котором наблюдается повторение, назовем **периодом**.

Если для функции $f(x)$, определенной на множестве X при произвольном x существует $T>0$, удовлетворяющее равенству $f(x+T)=f(x)$, то функция $f(x)$ называется *периодической*, при этом $x+T \in X$.

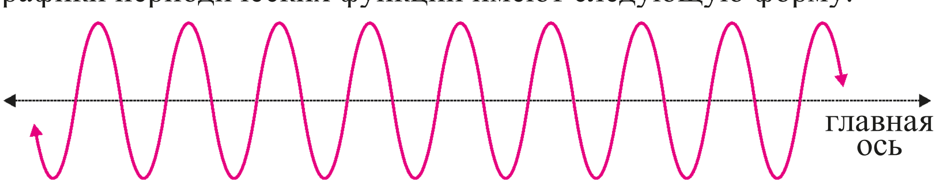
Очевидно, что если $f(x+T)=f(x)$, то $f(x)=f(x+T)=f(x+2T)=\ldots$ Наименьшее значение таких чисел $T>0$ назовем *периодом функции*.

Если колесо совершает вращательное движение по прямой, то отмеченная в нем точка совершает периодическое движение по кривой, называемой **циклоидой**.

Необходимо отметить, что циклоида не описывается уравнением вида $y=f(x)$.

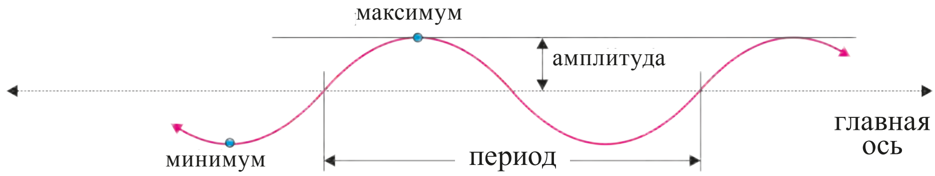


Графики периодических функций имеют следующую форму:



Уравнение главной оси находится следующим образом: $y = \dfrac{\max + \min}{2}$,
где max – наибольшее значение, а min – минимальное значение функции.

Периодическая функция имеет следующие составные части:



Амплитуда есть расстояние между максимумом функции и главной осью (или между осью и минимумом):

$$\text{амплитуда} = \frac{\max - \min}{2}.$$

Вопросы и задания

1. Приведите пример периодического процесса.
2. Дайте определение периода функции.
3. Как вычисляется амплитуда периодической функции?
4. Что такое циклоида?

Упражнения

113. Для каждого случая изобразите данные в графическом виде и сделайте вывод об их периодичности или непериодичности:

a)	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	y	0	1	1,4	1	0	–1	–1,4	–1	0	1	1,4	1	0

b)	x	0	1	2	3	4
	y	4	1	0	1	4

c)	x	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
	y	0	1,9	3,5	4,5	4,7	4,3	3,4	2,4

d)	x	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
	y	0	4,7	3,4	1,7	2,1	5,2	8,9	10,9	10,2	8,4	10,4

114. В нижеследующей таблице приведены величины, выражающие движение точки, отмеченной на колесе, которое совершает по прямой вращательное движение.

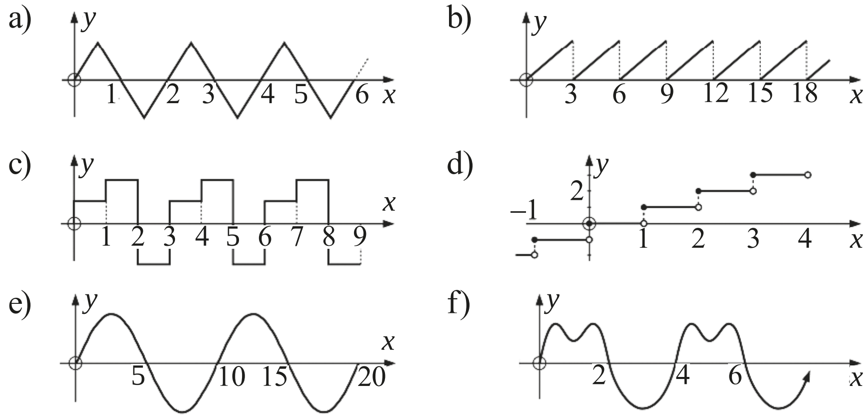
Расстояние (см)	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
Высота (см)	0	6	23	42	57	64	59	43	23	7	1

Расстояние (см)	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400
Высота (см)	5	27	40	55	63	60	44	24	9	3

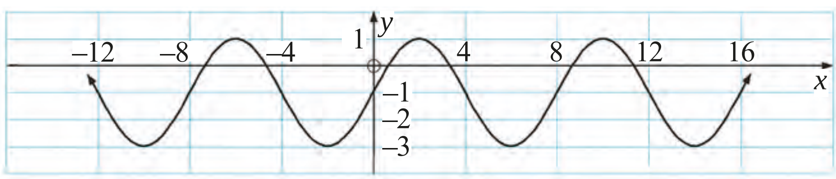
a) Изобразите зависимость высоты от расстояния в графическом виде.

b) Является ли этот процесс периодическим? Если процесс периодический, то найдите уравнение оси, максимума, периода, амплитуды, функции.

115. Какие из следующих графиков выражают периодический процесс?



116.



Для заданной периодической функции:

a) найдите амплитуду;
b) найдите период;
c) найдите точку первого максимума;
d) определите расстояние между двумя максимумами;
e) составьте уравнения главной оси.

56-58 ФУНКЦИИ $y=\sin x$, $y=\cos x$ И МОДЕЛИРОВАНИЕ С ИХ ПОМОЩЬЮ

Пусть в прямоугольном треугольнике a, b – катеты, c – гипотенуза. Угол, противоположный катету a, обозначим через α (см. рис. 1).

В курсе геометрии синус и косинус угла α вводятся с помощью следующих равенств:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Если принять длину гипотенузы за 1, то рис.1 примет вид рис. 2.

Введем в плоскость систему координат, рассмотрим в ней *окружность*, радиус которой равен 1 (*единичная окружность*) и на этой окружности обозначим точку A_α, соответствующую углу α (рис.3).

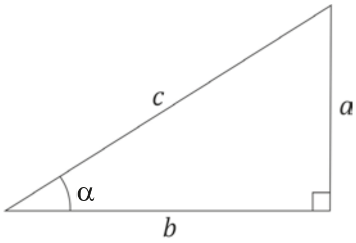


Рис.1.

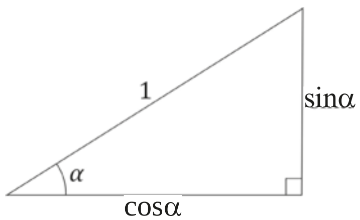


Рис.2.

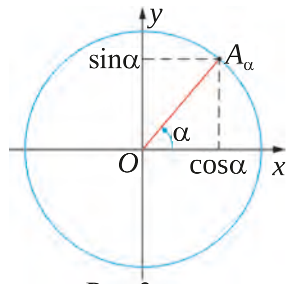


Рис.3.

Синусом угла α называется ордината точки A_α, полученная в результате поворота точки $(1;0)$ вокруг начала координат на угол α (обозначается как sinα).

Точно так же, косинусом угла α называется абсцисса точки A_α, (обозначается как cosα).

Если точка, соответствующая углу α, лежит на других четвертях, то имеем следующие фигуры (рис.4):

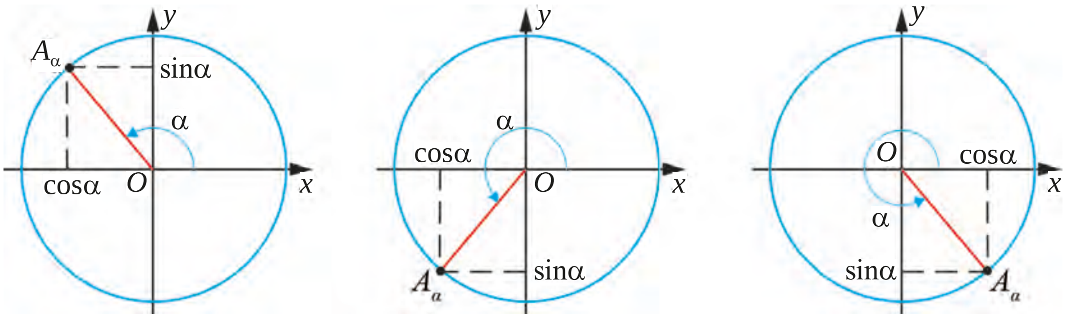


Рис.4.

Пусть $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$. Из теоремы Пифагора следует *основное тригонометрическое тождество* $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Отметим, что углы (дуги), рассматриваемые в тригонометрии, измеряются в градусах или в радианах.

Отношение длины дуги, соответствующее центральному углу α на радиус той же дуги, называется радианной мерой этого угла.

Радианная мера угла α, заданная в градусах, равна $\frac{\pi}{180^\circ}\alpha$.

Приведем таблицу радианных мер наиболее часто встречающихся углов:

Градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Найдем значения синуса и косинуса некоторых углов.

1. Пусть $\alpha = 0°$ (рис.5). В данном случае абсцисса соответствующей точки равна 1, а её ордината равна 0. Следовательно, $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$.

2. Пусть $\alpha = \pi/6 = 30°$ (рис.6). Так как в прямоугольном треугольнике катет, противолежащий углу в 30° равен половине гипотенузы, то $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

По основному тригонометрическому тождеству $\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Пусть $\alpha = \pi/4 = 45°$ (рис. 7). В этом случае получится равнобедренный прямоугольный треугольник.

В таком треугольнике синус и косинус угла α равны между собой и положительны. Обозначим их через x. Из основного тригонометрического тождества $x^2 + x^2 = 1$, т.е. $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

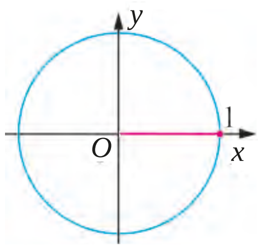


Рис.5.

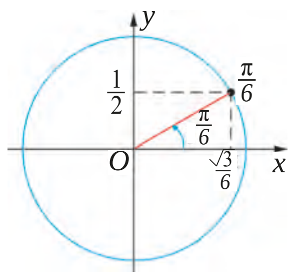


Рис.6.

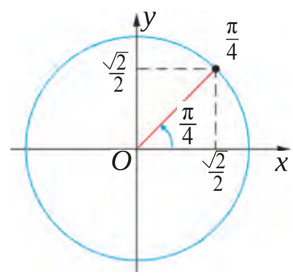


Рис.7.

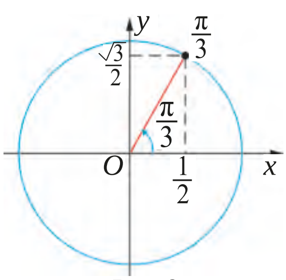


Рис.8.

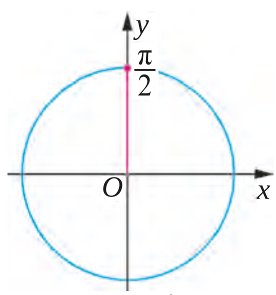


Рис.9.

4. Пусть $\alpha = \frac{\pi}{3} = 60°$ (рис.8). В этом случае, рассуждая как и в случае $\alpha = \frac{\pi}{6}$, получим равенства $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Пусть $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90°$ (рис.9). В этом случае абсцисса соответствующей

точки равна 0, а её ордината равна 1. Следовательно, $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$.

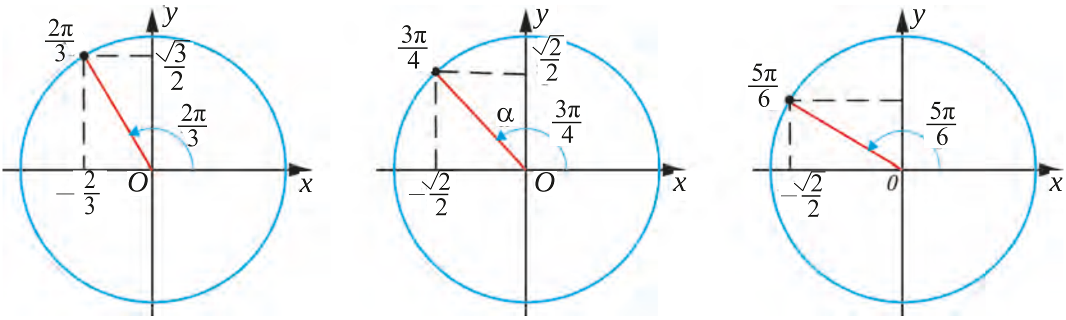


Рис.10.

6. Рассмотрим случаи: $\frac{2\pi}{3}=120°$, $\frac{3\pi}{4}=135°$, $\frac{5\pi}{6}=150°$ (рис.10). Для точки $\frac{2\pi}{3}$ имеем $\frac{2\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}$. Тогда эта точка симметрична точке $\frac{\pi}{3}$ относительно оси *Oy*. Следовательно, $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$, $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Для точки $\frac{3\pi}{4}$ имеем $\frac{3\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}$. Тогда эта точка симметрична точке $\frac{\pi}{4}$ относительно оси *Oy*. Следовательно, $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

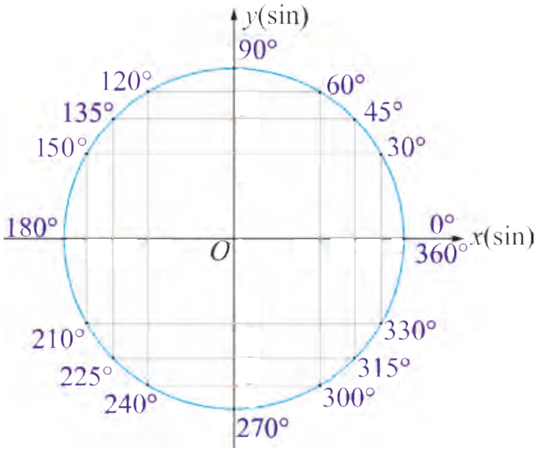
Для точки $\frac{5\pi}{6}$ имеем $\frac{5\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}$. Тогда эта точка симметрична точке $\frac{\pi}{6}$ относительно оси *Oy*. Следовательно, $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

7. В случае $\alpha=\pi=180°$ имеем $\cos\pi=-1$, $\sin\pi=0$. Доказательство этого предоставляем учащимся.

Выше мы определили значения косинусов и синусов некоторых углов из отрезка $[0; \pi]$. Прибавив к каждому из этих углов π, можно определить значения косинусов и синусов углов из отрезка $[\pi; 2\pi]$.

Полученные результаты изобразим на *тригонометрической окружности* (рис.11).

Пользуясь вышеуказанными значениями, можно построить графики функций $y=\sin x$, $y=\cos x$. Для этого на оси абсцисс отметим значение угла α, а на оси ординат отметим соответствующие значения синуса. Затем построим соответствующие точки. Теперь, соединив эти точки плавной кривой линией, получим изображение графика функции $y=\sin x$ на промежутке $[0;2\pi]$ (рис.12). График функции $y=\cos x$ (рис.13) строится подобным образом.



$30° = \frac{\pi}{6}$;	$45° = \frac{\pi}{4}$;	$60° = \frac{\pi}{6}$;
$90° = \frac{\pi}{2}$;	$120° = \frac{2\pi}{3}$;	$135° = \frac{3\pi}{6}$;
$180° = \pi$;	$210° = \frac{7\pi}{6}$;	$225° = \frac{5\pi}{4}$;
$240° = \frac{4\pi}{3}$;	$270° = \frac{3\pi}{2}$;	$300° = \frac{5\pi}{3}$;
$315° = \frac{7\pi}{4}$;	$330° = \frac{11\pi}{6}$.	

Рис.11. Тригонометрическая окружность. Некоторые значения синуса и косинуса.

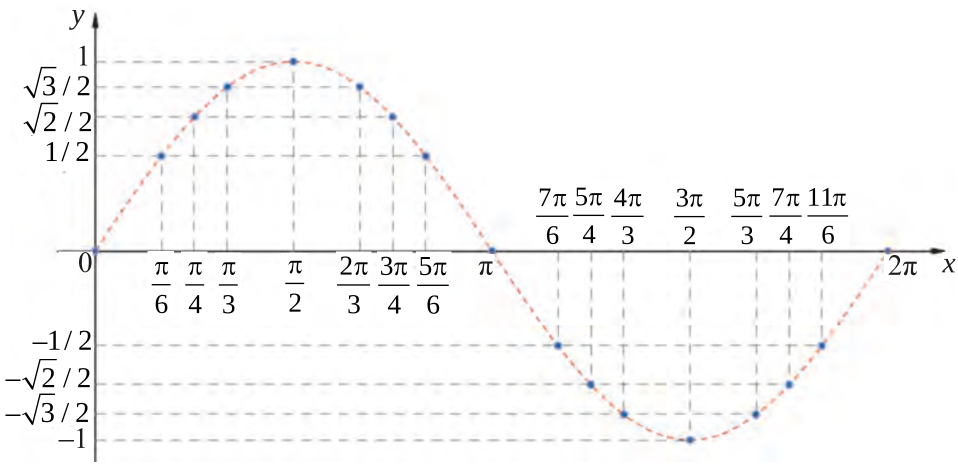


Рис. 12. $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

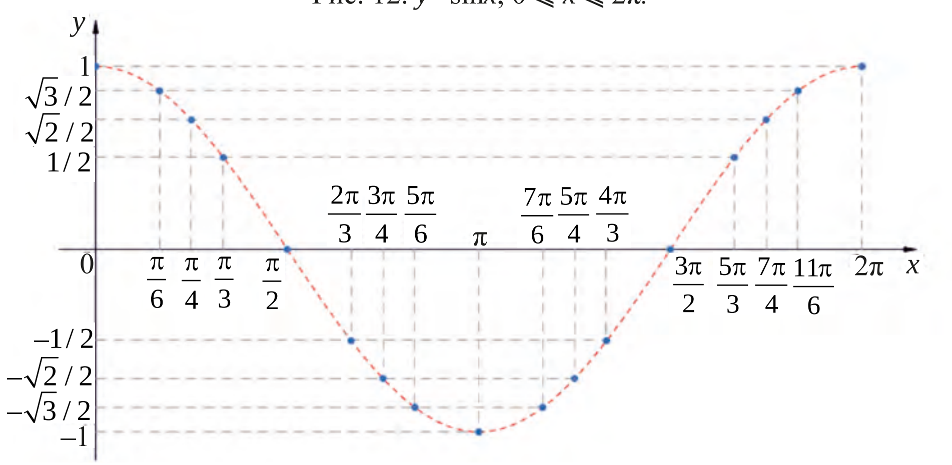


Рис. 13. $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Продолжив эти графики периодически, получим графики функций $y=\sin x$, $y=\cos x$ (рис.14 и 15).

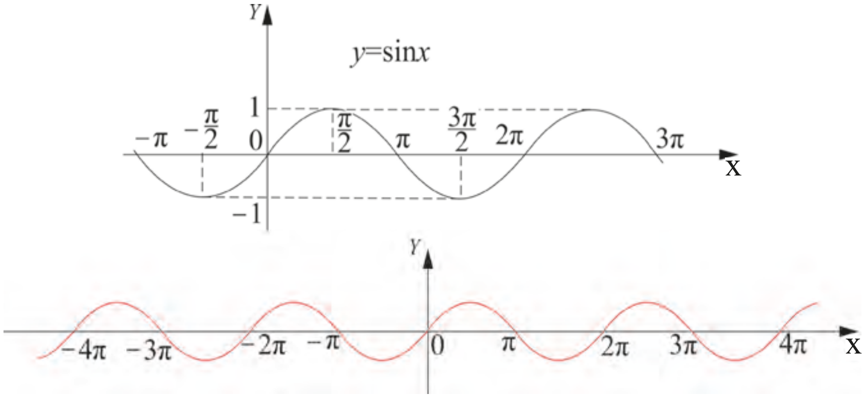


Рис.14. $y=\sin x$, $x\in R$.

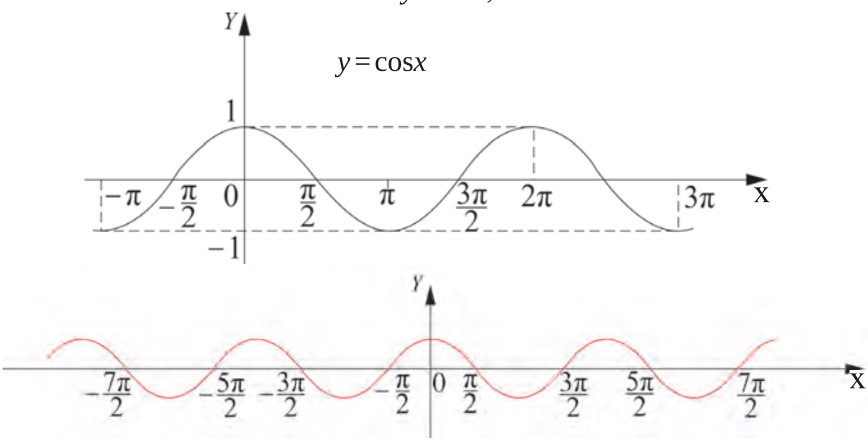


Рис.15. $y=\cos x$, $x\in R$.

Из этих графиков получим следующие выводы:

период функции $y=\sin x$ ($y=\cos x$) равен 2π, амплитуда равна 1, а наименьшее значение равно –1.

Приведем некоторые факты о функциях $y=a\sin x$ и $y=\sin bx$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, широко применяемых в приложениях.

Амплитуда функции $y=a\sin x$ равна $|a|$. Её график получается в результате растяжения графика функции $y=\sin x$ при $|a|>1$, а при $|a|<1$ сжатия. Период функции $y=\sin bx$ равен $\dfrac{360°}{|b|}$. График этой функции получается из графика функции $y=\sin x$ при $0<|b|<1$ растяжением, а при $|b|>1$ сжатием.

График функции вида $y=\sin x+c$ получается в результате параллельного переноса графика функции $y=\sin x$ на c единиц и при этом главная ось функции $y=\sin x+c$ имеет уравнение $y=c$.

Учитывая вышеприведенные сведения, можно построить график функции вида $y = a\sin bx + c$.

Например, рассмотрим функцию $y = 2\sin 3x + 1$.

График этой функции получается из графика функции $y=\sin x$ следующим образом:

1. Умножив амплитуду на 2, получим $y = 2\sin x$.
2. Разделив период на 3, получим $y = 2\sin 3x$.
3. Совершим параллельный перенос на 1. Главная ось функции $y = 2\sin 3x + 1$ имеет уравнение $y = 1$.
4. В результате получим график функции $y = 2\sin 3x + 1$.

Подобные рассуждения можно привести и о функции $y=\cos x$.

Пример 1. Постройте графики функций $y=2\sin x$, $y=-2\sin x$, $y=\sin 2x$, $0°\le x\le 360°$.

△ Вначале построим график функции $y = 2\sin x$. Амплитуда этой функции равна 2 и её график получается в результате растяжения графика функции $y=\sin x$ по оси ординат.

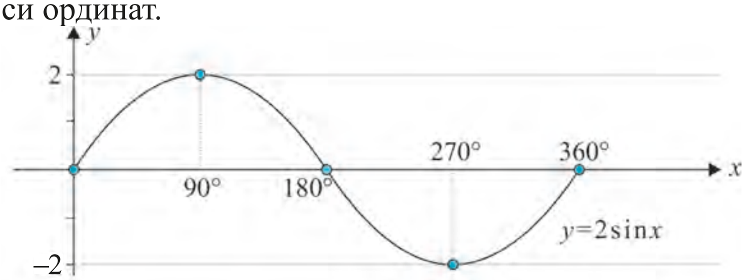
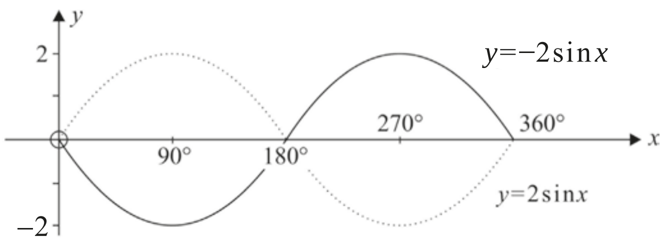
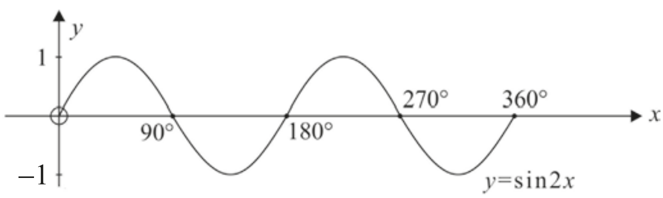


График функции $y=-2\sin x$ симметричен графику функции $y=2\sin x$ относительно оси абсцисс. Пользуясь этим, построим график функции $y=-2\sin x$.

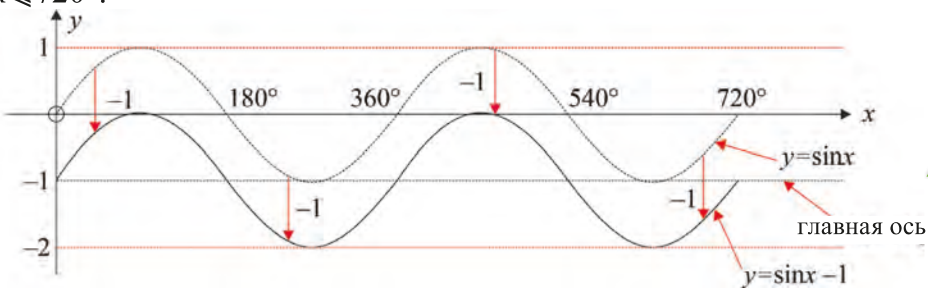


Период функции $y=\sin 2x$ равен $\dfrac{360°}{2} = 180°$. График этой функции имеет вид:



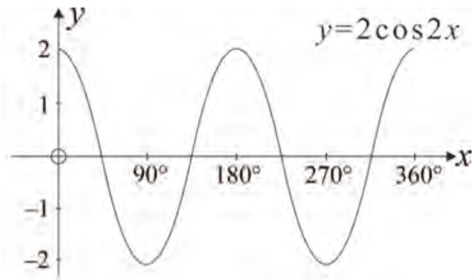
▲

Пример 2. Постройте графики функций $y=\sin x$ и $y=\sin x-1$ при $0°\leqslant x\leqslant 720°$.



Пример 3. Построим график функции $y=2\cos 2x$ в отрезке $0°\leqslant x\leqslant 360°$.

$a=2$. Следовательно, амплитуда функции: $|2|=2$. Так как $b=2$, то период функции: $\dfrac{360°}{|b|}=\dfrac{360°}{2}=180°$. Отсюда имеем следующий график:



Вопросы и задания

1. Дайте определение синуса угла в единичной окружности.
2. Дайте определение косинуса угла в единичной окружности.
3. Вычислите синус и косинус угла в 30°.
4. Начертите график функции $y=\sin x$.
5. Начертите график функции $y=\cos x$.

Упражнения

117. Постройте графики функций на отрезке $0°\leqslant x\leqslant 360°$:

a) $y=3\sin x$; | b) $y=-3\sin x$; | c) $y=\dfrac{3}{2}\sin x$; | d) $y=-\dfrac{3}{2}\sin x$.

118. Постройте графики функций на отрезке $0°\leqslant x\leqslant 540°$:

a) $y=\sin 3x$; | b) $y=\sin(\dfrac{x}{2})$; | c) $y=\sin(-2x)$; | d) $y=-\sin\dfrac{x}{3}$.

119. Определите период функции:

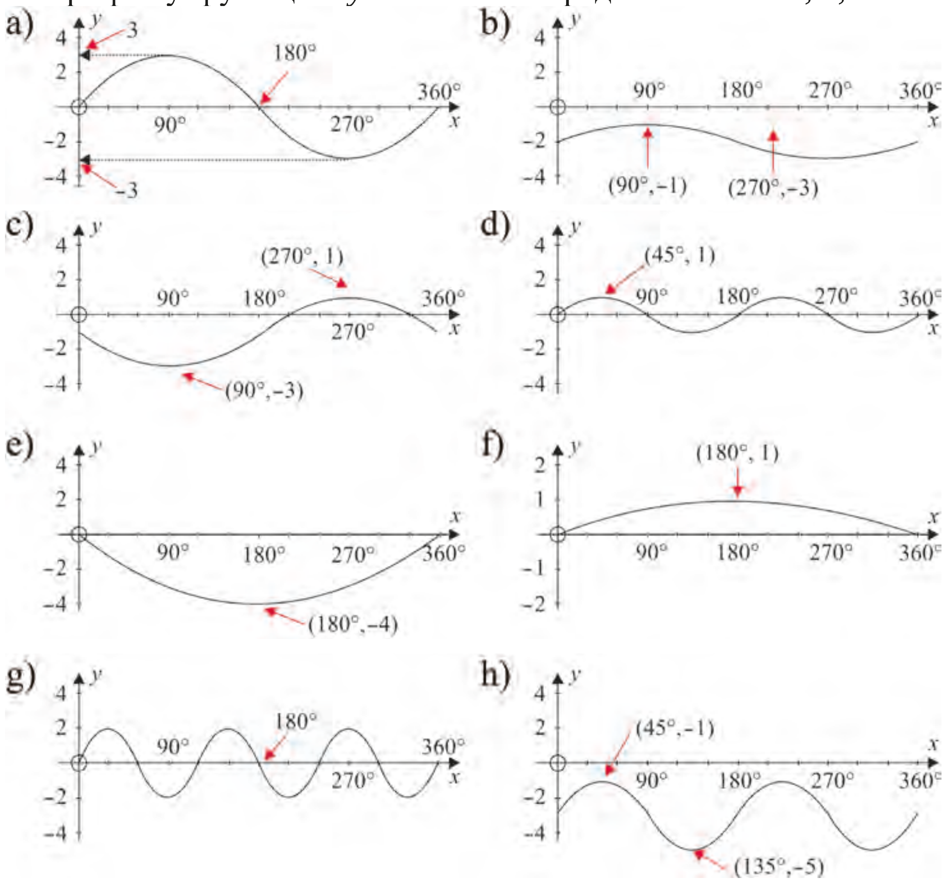
a) $y=\sin 4x$; | b) $y=\sin(-4x)$; | c) $y=\sin(\dfrac{x}{3})$; | d) $y=\sin(0{,}6x)$.

120. Если для функции $y=\sin bx$, $b>0$ его период равен:

a) 900°; | b) 120°; | c) 2160°; | d) 720°.

то найдите b.

121. По графику функции $y = a\sin bx + c$ определите числа a, b, c:

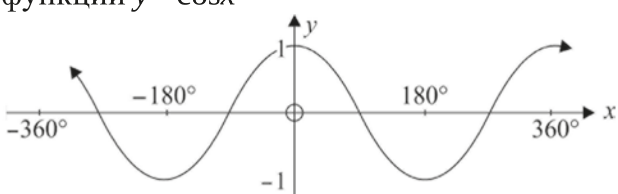


122. Постройте графики функций на отрезке $0° \leqslant x \leqslant 360°$:

a) $y = \sin x + 1$; b) $y = \sin x - 2$; c) $y = 1 - \sin x$;

d) $y = 2\sin x - 1$; e) $y = \sin 3x + 1$; f) $y = 1 - \sin 2x$.

123. По графику функции $y = \cos x$



постройте графики функций:

a) $y = \cos x + 2$; b) $y = \cos x - 1$; c) $y = \dfrac{2}{3}\cos x$;

d) $y = \dfrac{3}{2}\cos x$; e) $y = -\cos x$; f) $y = \cos 2x$;

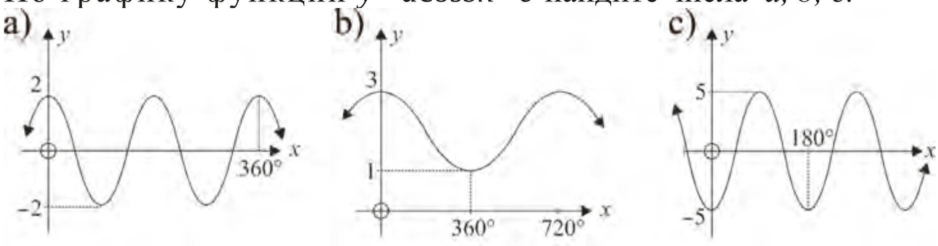
g) $y = \cos(\dfrac{x}{2})$; h) $y = 3\cos 2x$.

124 Определите период функции:

a) $y=\cos 3x$; b) $y=\cos(\frac{x}{3})$; c) $y=\cos(\frac{x}{2})$; d) $y=\cos 4x$.

125. Пусть задана функция $y=a\cos bx+c$. Определите геометрический смысл чисел a, b, c.

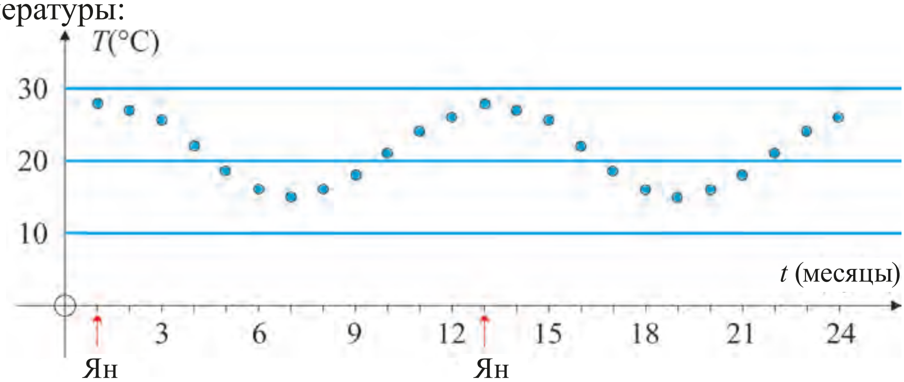
126. По графику функции $y=a\cos bx+c$ найдите числа a, b, c.



Пример 4. Ниже дана таблица изменений месячной максимальной температуры в городе Кейптаун в Южной Африке.

Месяц	*Ян*	*Фев*	*Мар*	*Апр*	*Май*	*Июн*	*Июл*	*Авг*	*Сен*	*Окт*	*Ноя*	*Дек*
T (°C)	28	27	$25\frac{1}{2}$	22	$18\frac{1}{2}$	16	15	16	18	$21\frac{1}{2}$	24	26

Приведем график, приближенно отражающий изменения максимальной температуры:



Допустим, что модель этого процесса имеет вид $T=a\cos bt+c$. Находим параметры a, b, c. Так как период равен 12 месяцам, то

$$\frac{360°}{|b|}=12\text{, т.е. } b=\frac{360°}{12}=30°.$$

Вычислим амплитуду: $\frac{\max-\min}{2}\approx\frac{28-15}{2}=6,5$. Отсюда $a\approx 6,5$.

Поскольку главная ось находится в середине максимального и минимального значений: $c\approx\frac{28+15}{2}\approx 21,5$.

Следовательно, математическая модель изменения максимальной месячной температуры есть функция $T \approx 6{,}5\cos 30t + 21{,}5$.

Упражнения

127. Известно, что на полярной базе в Антарктиде в течение 30 лет средняя температура была такой:

Порядковая цифра месяца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Температура (°C)	0	–4	–10	–15	–16	–17	–18	–19	–17	–13	–6	–1

Составьте математическую модель изменения средней температуры.

128. При наблюдении на берегу у моря процесса отлива и прилива воды были определены следующие сведения: 1) разница между максимальными и минимальными значениями глубины воды составила 14 метров; 2) глубина воды своего наибольшего значения достигает в среднем за каждые 12,4 часов. Составьте математическую модель изменения глубины воды по отношению к времени и изобразите его в графическом виде.

129. На колесо велосипеда установлен светоотражатель желтого цвета. При движении велосипеда ночью на прямолинейной дороге он был снят на видеоизображение. На основе видеофиксации определили изменение высоты светоотражателя по отношению к уровню дороги в зависимости от времени и составили следующую таблицу:

Время (t, сек.)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Высота (H, см)	19	17	38	62	68	50	24	15	31

a) составьте математическую модель процесса, используя функцию синус;

b) начертите графический вид процесса;

c) найдите радиус колеса;

d) на какой скорости двигался велосипед?

59-61 ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение $\sin x = a$

Известно, что $-1 \le \sin x \le 1$, поэтому уравнение $\sin x = a$ при $|a| > 1$ не имеет решения. Для нахождения решения уравнения в промежутке $-1 \le a \le 1$ вводим следующее определение:

Арксинусом числа $a\in[-1;\ 1]$ называется число $x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, синус которого равен a: если $\sin x = a$ и $x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, то $\arcsin a = x$.

При решении уравнения воспользуемся графиком функции $y=\sin x$ на рис.16.

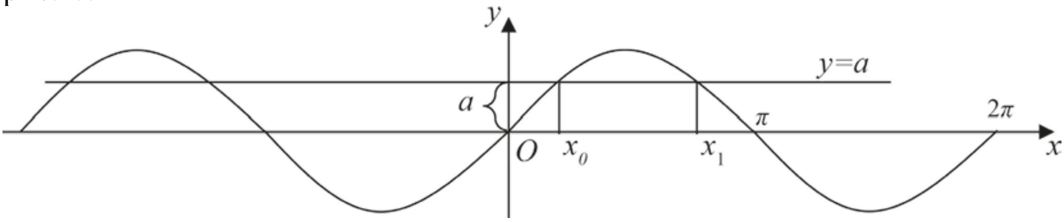


Рис.16.

Как видно из графика, при $a\in[-1;\ 1]$ функция $y=a$ в отрезке $[0;\ 2\pi]$ пересекает график функции $y=\sin x$ в точках с абсциссами x_0 и $x_1=\pi-x_0$. Эти две точки можно написать с помощью одной формулы:

$$x=(-1)^n \arcsin a, \text{ где } n = 0,\ 1.$$

Для решения уравнения, пользуясь периодичностью функции $y=\sin x$, получим следующую формулу:

$$x=(-1)^k \arcsin a+ \pi k,\ k\in Z. \qquad (1)$$

Пример 1. Вычислите: 1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

△ По определению $-1\le\frac{\sqrt{3}}{2}\le 1$, $\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ и так как $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$. Точно также, $\arcsin(-\frac{1}{2})=-\arcsin\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{6}$. ▲

Пример 2. Решите уравнение $\sin x=\frac{1}{2}$.

△ По формуле (1) решение уравнения:

$$x=(-1)^k \arcsin\frac{1}{2}+\pi k=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ \ k\in Z. \ ▲$$

Пример 3. Решите уравнение: $\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{x}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

△ Так как функция $y=\sin x$ нечетная, то $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Применив формулу (1), получим равенство

$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}=(-1)^k\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k,\ \ k\in Z$. Так как $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$

или получим решения $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k$

$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k$ или $x=\frac{\pi}{6}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$. ▲

Приведем решения уравнения $\sin x=a$ в частных случаях: при $a=1$ $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; при $a=-1$ $x=\frac{3}{2}\pi+2\pi k,\ k\in Z$;

при $a=0$ $x=\pi k,\ k\in Z$.

Пример 4. Решите уравнение: $\sin\left(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=0$.

△ Из $a=0$ находим: $-\frac{\pi}{10}+\frac{x}{2}=\pi k$, $\frac{x}{2}=\pi k+\frac{\pi}{10}$, т.е. получим решение: $x=\frac{\pi}{5}+2\pi k,\ k\in Z$. ▲

Решение уравнения $\sin x=a$ легко объяснить на единичной окружности. По определению, $\sin x$ – ордината точки A_{x_y} в единичной окружности. При $|a|<1$ такие точки две, т.е. A_{x_1} и A_{x_2}. При $a=\pm1$ одна. (рис.17).

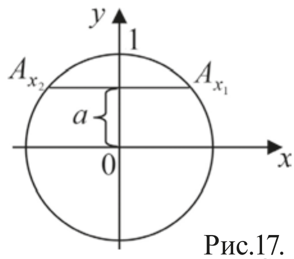


Рис.17.

Уравнение $\cos x=a$. Так как $-1\le\cos x\le1$ – это уравнение $\cos x=a$, при $|a|>1$ не имеет решения. Для нахождения решения уравнения для $-1\le a\le1$ введем следующее определение.

Арккосинусом числа $a\in[-1;\ 1]$ называется число $x\in[0;\ \pi]$, косинус которого равен a: если $\cos x=a$ и $x\in[0;\ \pi]$, то $a=x$.

По определению, уравнение $\cos x=a$ в промежутке $[0;\ \pi]$ имеет один корень $x=\arccos a$. Так как функция $y=\cos x$ четная, то в промежутке $[-\pi;0]$ тоже имеет одно решение $x=-\arccos a$. Период функции равен 2π, поэтому для решения уравнения $\cos x=a$ получим формулу

$$x=\pm\arccos a+2\pi k,\ k\in Z. \qquad (2)$$

Пример 5. Вычислите: 1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

△Так как по определению, $-1\le\frac{\sqrt{3}}{2}\le1$, $\frac{\pi}{6}\in[0;\pi]$ и $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ имеем $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$. Точно так же, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$. ▲

Пример 6. Решите уравнение $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

△ По формуле (2) решение уравнения: $x = \pm \arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$, но $\arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{6}$. Следовательно, решение имеет вид: $x = \pm \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$. ▲

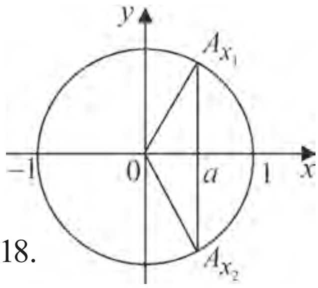


Рис.18.

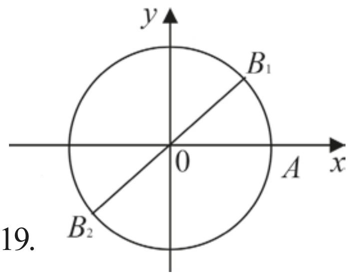


Рис.19.

Решение уравнения $\cos x = a$ поясним на единичной окружности (рис.18). По определению функции $\cos x$ её значением будет абсцисса точки A_x в единичной окружности. При $|a|<1$ таких точек две, т.е. A_{x_1} и A_{x_2}; при $a=1$ и $a=-1$ такая точка одна.

Приводим решение уравнение $\cos x = a$ в частных случаях:

при $a=1$ решение $x=2\pi k,\ k\in Z$; при $a=-1$ решение $x=\pi+2\pi k,\ k\in Z$;

при $a=0$ решение $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k\in Z$.

Пример 7. Решите уравнение: $\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

△ По формуле решения уравнения $\cos x=0$ получим: $3x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$.

Отсюда, $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{3},\ k \in Z$. ▲

Уравнение tg$x=a$

Для решения этого уравнения введем следующее определение. ***Арктангенсом*** числа $a\in R$ называется число $x\in(-\pi/2;\pi/2)$, тангенс которого равен числу a: если $\operatorname{tg} x=a$ и $x\in(-\pi/2;\pi/2)$, то $\operatorname{arctg} a=x$.

Так как $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, то tg$x$ равен отношению ординаты на абсциссу точки $B\ (x;\ y)$ в единичной окружности (рис.19), т.е. она есть точка пересечения прямой $\dfrac{y}{x} = a$ и единичной окружности. На рис. 19 таких точек две: точки

B_1 и B_2: Поэтому решение уравнения будет

$$x = \mathrm{arctg}\,a + \pi n,\ n \in Z. \qquad (3)$$

Пример 8. Вычислите: 1) $\mathrm{arctg}1$; 2) $\mathrm{arctg}(-\sqrt{3})$.

△ 1) Так как $\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$ и $\dfrac{\pi}{4} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, то $\mathrm{arctg}1 = \dfrac{\pi}{4}$;

2) Так как $\mathrm{tg}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ и $-\dfrac{\pi}{3} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, то $\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$. ▲

Пример 9. Решите уравнение: $\mathrm{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$.

△ По формуле (3) решение уравнения будет таким:

$x - \dfrac{\pi}{6} = \mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n$. Так как $\mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) = -\mathrm{arctg}(\sqrt{3}) = -\dfrac{\pi}{3}$, то решение уравнения: $x - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n$ или $x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$. ▲

Приводим таблицу для простейших тригонометрических функций:

Уравнение	Решение	Некоторые свойства
$\sin x = a$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z.$	$\arcsin(-a) = -\arcsin a,\ \lvert a \rvert \leqslant 1.$
$\cos x = a$	$x = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in Z.$	$\arccos(-a) = \pi - \arccos a,\ \lvert a \rvert \leqslant 1.$
$\mathrm{tg} x = a$	$x = \mathrm{arctg}\,a + \pi k,\ k \in Z.$	$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\,a,\ a \in R.$

Свойства, приведенные в третьем столбце, позволяют находить значения арксинусов (арккосинусов, арктангенсов), отрицательных чисел через значение арксинусов положительных чисел. Например,

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4},$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6},$$

$$\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}.$$

Пример 10. Решите уравнение: $\cos(10x + \dfrac{\pi}{8}) = \dfrac{1}{2}$.

△ Введя обозначение $10x + \dfrac{\pi}{8} = z$, получим уравнение $\cos z = \dfrac{1}{2}$.

Отсюда по формуле (2) $z = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$, т. е. $10x + \dfrac{\pi}{8} = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$ или

$$x=\frac{1}{10}\left(-\frac{\pi}{8}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right),\ k\in Z.$$

Уравнения вида $\sin x=\sin a$, $\cos x=\cos b$, $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} c$

Решения таких уравнений будут соответственно:

$$x=(-1)^k a+\pi k,\quad k\in Z;\quad x=\pm b+2\pi n,\ n\in Z;\quad x=c+\pi m,\ m\in Z. \qquad (4)$$

Пример 11. Решите уравнение $\cos(3x-40°)=\cos(2x+60°)$.

По формуле (4) получим уравнение $3x-40°=\pm(2x+60°)+360°n,\ n\in Z$. Отсюда найдём неизвестное x:

$$3x-40°=2x+60°+360°n \Leftrightarrow x=100°+360°n,\ n\in Z;$$

$$3x-40°=-2x-60°+360°n,\ 5x=-20°+360°n \Leftrightarrow x=-4°+72°n,\ n\in Z.$$

Пример 12. Решите уравнение $\sin^2 x+3\sin x+2=0$.

Введя обозначения $\sin x=z$, имеем квадратное уравнение $z^2+3z+2=0$. Решив это уравнение, найдем $z_1=-2$, $z_2=-1$. Отсюда получим уравнения $\sin z=-2$ и $\sin x=-1$. Уравнение $\sin z=-2$ не имеет решения. Уравнение $\sin x=-1$ имеет решение $x=270°+360°k,\ k\in Z$. Следовательно, решение заданного уравнения будет $x=270°+360°k,\ k\in Z$.

Вопросы и задания

1. Как решается уравнение $\sin x=a$? Объясните на примере.
2. Как решается уравнение $\cos x=a$? Приведите пример.
3. Как решается уравнение $\operatorname{tg} x=a$? Объясните с помощью примера.
4. Дайте определение числа $\arcsin a$. Объясните на примере.
5. Дайте определение числа $\arccos a$. Объясните на примере.
6. Дайте определение числа $\operatorname{arctg} a$. Объясните на примере.

Упражнения

Вычислите (**130–141**):

130. 1) $\arcsin 0$; 2) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\arcsin\frac{1}{2}$; 4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

131. 1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 3) $\arcsin 1$; 4) $\arcsin(-1)$.

132. 1) $\arccos 0$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\arccos(-1)$.

133. 1) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $\arccos\frac{1}{2}$; 3) $\arccos 1$; 4) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

134. 1) $\operatorname{arctg}1$; | 2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; | 3) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$; | 4) $3\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

135. 1) $\operatorname{arctg}0$; | 2) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$; | 3) $\operatorname{arctg}(-1)$; | 4) $7\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

136. 1) $\arcsin 1+\arcsin(-1)$; | 2) $2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+4\arcsin\frac{1}{2}$.

137. 1) $4\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; | 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

138. 1) $2\arccos 1+3\arccos 0$; | 2) $6\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}-3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

139. 1) $2\arccos(-1)-3\arccos 0$; | 2) $2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+4\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

140. 1) $3\operatorname{arctg}\sqrt{3}+3\arccos\frac{1}{2}$; | 2) $3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

141. 1) $2\operatorname{arctg}1+3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; | 2) $5\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})-3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Имеют ли смысл выражения (**142–143**):

142. 1) $\arccos(\sqrt{8}-3)$; | 2) $\arcsin(2-\sqrt{15})$; | 3) $\arccos(3-\sqrt{18})$.

143. 1) $\operatorname{tg}(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2})$; | 2) $\arcsin(\sqrt{6}-2)$; | 3) $\operatorname{tg}(3\arccos\frac{1}{2})$.

Решите уравнения (**144–161**):

144. 1) $\sin x=-\frac{1}{2}$; | 2) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; | 3) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; | 4) $\sin 2x=\frac{1}{2}$.

145. 1) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; | 2) $\sin x=1$; | 3) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; | 4) $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

146. 1) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; | 2) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; | 3) $\cos 2x=-1$; | 4) $\cos 3x=1$.

147. 1) $\cos x=\frac{1}{2}$; | 2) $\cos x=-1$; | 3) $\cos 5x=-\frac{1}{2}$; | 4) $\cos 3x=-1$.

148. 1) $\operatorname{tg}x=-\sqrt{3}$; | 2) $\operatorname{tg}x=1$; | 3) $\operatorname{tg}9x=-1$; | 4) $\operatorname{tg}3x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

149. 1) $\operatorname{tg}x=0$; | 2) $\operatorname{tg}x=2$; | 3) $\operatorname{tg}6x=-3$; | 4) $\operatorname{tg}5x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

150. 1) $2\cos x+1=0$; | 2) $2\cos x-\sqrt{3}=0$; | 3) $2\cos x-\sqrt{2}=0$.

151. 1) $\sqrt{2}\sin x-1=0$; | 2) $2\sin x+\sqrt{3}=0$; | 3) $2\sin x+\sqrt{2}=0$.

152. 1) $\sin\left(-\frac{x}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; | 2) $\operatorname{tg}4x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; | 3) $\cos(-3x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

153. 1) $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$; | 2) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=1$; | 3) $2\cos(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$.

154. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=-1$; | 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{3}\right)=1$; | 3) $2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3}$.

155. 1) $2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3}$; | 2) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=\sqrt{2}$; | 3) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$.

156. 1) $(2\sin x+\sqrt{2})(\sin 4x+1)=0$; | 2) $(2-\cos x)(1+3\cos x)=0$.

157. 1) $2\sin^2 x-\sin x-1=0$; | 2) $4\cos^2 x-8\cos x-3=0$;
3) $2\sin^2 x-\sin x-6=0$; | 4) $2\cos^2 x-\cos x-6=0$.

158. 1) $2\sin^2 x-\sin x-1=0$; | 2) $4\cos^2 x-8\cos x-3=0$;
3) $2\sin^2 x-\sin x-6=0$; | 4) $2\cos^2 x-\cos x-6=0$.

159. 1) $2\cos^2 x-\sin x+1=0$; | 2) $\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg}x-4=0$;
3) $4\sin^2 x-\cos x-1=0$; | 4) $\operatorname{tg}x-\sqrt{3}\operatorname{tg}x+1=\sqrt{3}$.

160. 1) $\cos x=\cos 2x$; | 2) $\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}3x$; | 3) $\sin 7x=\sin 3x$; | 4) $\cos 4x=\cos 5x$.

161. 1) $\sin 4x=\sin x$; | 2) $\sin 2x=\cos 3x$; | 3) $\operatorname{tg}10x=\operatorname{tg}8x$; | 4) $\sin 5x=\sin 7x$.

62-64 ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Неравенства вида $a_1 < \sin x < b_1,\ a_2 < \cos x < b_2,\ a_3 < \mathrm{tg} x < b_3$ называются простейшими тригонометрическими неравенствами. Здесь $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ – заданные действительные числа. При решении таких неравенств удобно использовать единичный круг и графики функции.

Пример 1. Найдите решение неравенства $\sin x \le 0{,}5$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

△Рассмотрим единичной окружности. В этом круге найдем точки, ординаты которых равны или меньше 0,5. Из рис.20 видно, что все точки дуги *BDA* удовлетворяют выше названное условие. Значит, $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6};2\pi\right]$ есть решение неравенства.

Ответ: $x\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6};2\pi\right]$.▲

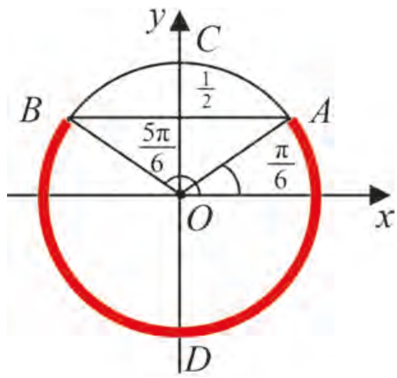


Рис.20.

Пример 2. Найдите решение неравенства $\cos x > \frac{1}{2}$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

△В единичной окружности найдем точки, ординаты которых больше $\frac{1}{2}$. Как видно из рис.21, все точки дуги *ACB* удовлетворяют вышеназванное условие. Поэтому множество чисел $\left[0;\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3};2\pi\right]$ будет решением неравенства

Ответ: $x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3};2\pi\right]$.▲

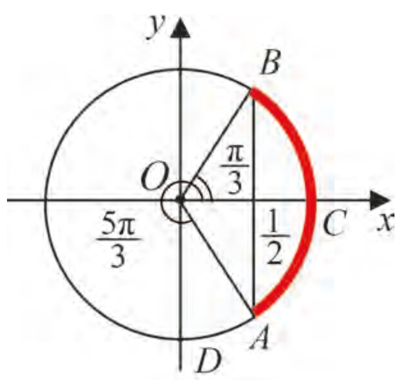


Рис.21.

Пример 3. Решите неравенство $\mathrm{tg}x \le 1$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

△Через точку *B* единичной окружности проведем прямую *AB* параллельно оси *Oy* (рис.22).

При этом точку A выберем таким образом, чтобы было $OB=AB$. $\triangle AOB$–равнобедренный и прямоугольный треугольник. Пусть точка D – точка пересечения гипотенузы OA с окружностью. Из рисунка видно, что все точки дуги DBC удовлетворяют заданному неравенству.

Ответ: $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$. ▲

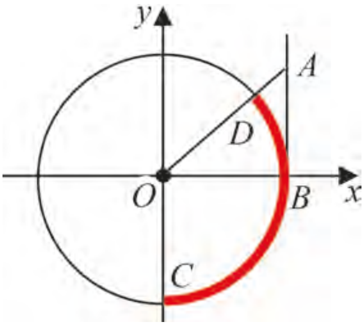


Рис.22.

Пример 4. Решите неравенство: $\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

△ Построим графики функций $y=\sin x$ и $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

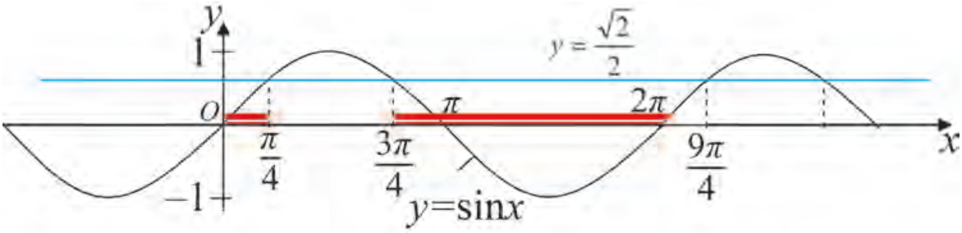


Рис.23.

Найдём решения уравнения $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$. Как видно из рисунка, решениями неравенства $\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$ являются отрезки $\left[0;\frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{4};2\pi\right]$. Из периодичности функции следует, что множество $\left[2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;2\pi(n+1)\right]$, $n\in Z$ является решением неравенства. ▲

Пример 5. Решите неравенство: $-2\cos x\geq 1$.

△ Начертим графики функций $y=\cos x$ и $y=-\frac{1}{2}$. Решениями уравнения $\cos x=-\frac{1}{2}$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$ являются $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$. Следовательно, решение неравенства состоит из отрезков $\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\frac{4\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n\in Z$. ▲

Пример 6. Решите неравенство $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$.

△ Изобразим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \sqrt{3}$ (рис.24). Найдём решение уравнения $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ на отрезке $[0; \pi]$. Решение этого уравнения $x = \frac{\pi}{3}$. Поэтому множество решений неравенства на отрезке $[0; \pi]$ есть промежуток $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$. Учитывая, что период функции $y = \operatorname{tg} x$ равен π, найдём все решения неравенства:

$$\left[\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \ n \in Z. ▲$$

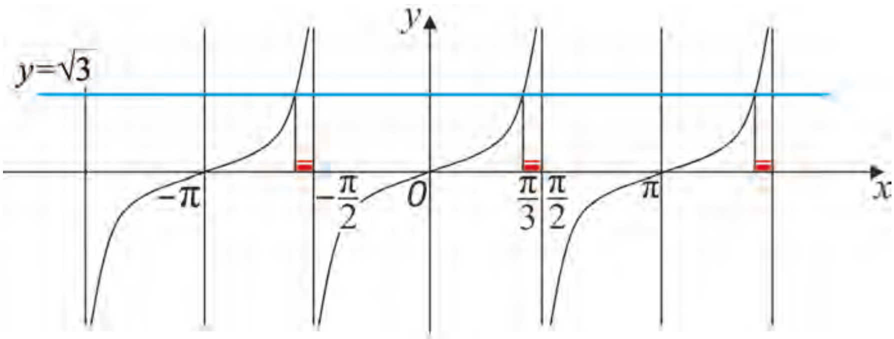


Рис.24.

Вопросы и задания

Как решаются неравенства: $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} x > -1$?

Упражнения

162. Решите неравенство в заданном отрезке:

1) $\sin x > \frac{1}{2}, \ x \in [0; \pi]$;

2) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}, \ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

3) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

4) $\cos x > \frac{1}{2}, \ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

5) $\sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [-\pi; 0]$; | 6) $\operatorname{tg} x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

7) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; | 8) $\cos 2x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решите неравенство (**163–169**):

163. 1) $\sin x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$; | 2) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; | 3) $\operatorname{tg} x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$; | 4) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

164. 1) $\sin x > \frac{1}{2}$; | 2) $\operatorname{tg} x > -1$; | 3) $\cos x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$; | 4) $\cos x \le \frac{1}{2}$.

165. 1) $\sin 3x < \frac{1}{2}$; | 2) $\sin \frac{x}{4} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; | 3) $\cos \frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$; | 4) $\operatorname{tg} 3x > 1$.

166. 1) $2\cos(2x + \frac{\pi}{3}) \le \sqrt{2}$; | 2) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \ge 1$; | 3) $2\cos(2x - \frac{\pi}{3}) > \sqrt{3}$.

167. 1) $\sin 2x \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{3} \le \frac{\sqrt{3}}{2}$; | 2) $2\sin 2x \cos 2x \ge \frac{1}{2}$.

168. 1) $\sin \frac{\pi}{4} \cos 3x + \cos \frac{\pi}{4} \sin 3x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; | 2) $\cos \frac{\pi}{4} \cos 2x - \sin 2x \sin \frac{\pi}{4} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

169. 1) $\cos\left(\frac{x}{2} + 1\right) \ge \frac{1}{2}$; | 2) $\sin\left(\frac{x}{4} - 2\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$; | 3) $\cos\left(1 - \frac{x}{3}\right) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Образец контрольной работы

Решите уравнения (**1–4**):

1. $\sin 3x = 0$.

2. $4\cos 6x = -2\sqrt{3}$.

3. $5\operatorname{tg} 4x = 3$.

4. $5\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x - 1 = 0$.

Решите неравенства на отрезке $x \in [0; \pi]$ (**5–6**):

5. $\sin x > \frac{1}{2}$.

6. $\operatorname{tg} x \le -1$.

68 ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ

Сдвиг

Пусть l – числовая ось и точка O – начало отсчёта в ней (рис.25). Пусть каждая точка l сдвигается на a единиц, при этом если $a>0$, то сдвиг совершается в положительном направлении (в направлении оси). Если $a<0$, то сдвиг выполняется в противоположном направлении. При $a=0$ точки не сдвигаются. Если точка $A=A(x)$ с координатой x при сдвиге на a единиц перешла на точку $A_1(x_1)$, то координата точки A_1 определяется формулой $x_1=x+a$. Точка A называется прообразом точки A_1, а точка A_1 образом точки A при сдвиге на a единиц.

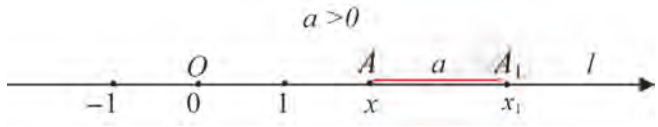


Рис. 25.

Растяжение

Пусть точка $B(x)$ в числовой оси l удалена от начала координат O в k раз и переведена в точку $B_1(x)$. Координата точки B_1 вычисляется по формуле $x_1=kx$. Если $k>0$, то точки B_1 и B лежат по одну сторону от точки O, а при $k<0$ точки B_1 и B лежат по разные стороны от точки O. Если $|k|<1$ (рис.26.), то отрезок OB сокращается в k раз: если $|k|>1$, то отрезок OB растягивается в k раз. При $k=1$ точки B и B_1 совпадают, при $k=-1$ они расположатся симметрично относительно точки O.

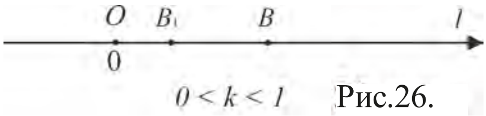


Рис.26.

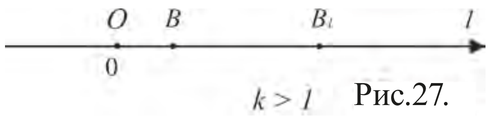


Рис.27.

Параллельный перенос

При параллельном переносе все точки в координатной плоскости $x\,Oy$ переносятся в одинаковом направлении и на одинаковое расстояние (рис.28). Так, если начало координат $O\,(0;\,0)$ перенесено в точку $N(a;\,b)$, то точка $M\,(x;\,y)$ переносится в точку $M'\,(x';\,y')$. Для координат точки $M'\,(x';\,y')$ справедливы следующие формулы: $x'=x+a,\; y'=y+b$.

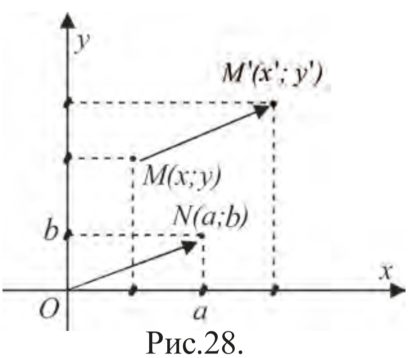


Рис.28.

Преобразование графика функции

Приведенные выше преобразования (сдвиг, растяжение, параллельный перенос) позволяют построить графики функций $y=f(x-a)+b$, $y=m\cdot f\left(\frac{x}{k}\right)$ (где a, b, m, k – постоянные числа и $m\neq0$, $k\neq0$) с помощью графика функции $y=f(x)$.

Например, чтобы построить график функции $y=f(x-a)+b$ с помощью графика функции $y=f(x)$, каждая точка графика $y=f(x)$ сдвигается вправо на a единиц и поднимается на b единиц вверх, т.е. переносится параллельно вектору $(a; b)$.

Чтобы построить график функции $y=m\cdot f\left(\frac{x}{k}\right)$ с помощью графика функции $y=f(x)$ абсцисса каждой точки графика функции $y=f(x)$ по оси Ox в k раз сжимается (если $k>0$ вправо, если $k>0$, то влево), а её ордината по оси Oy растягивается на m единиц (если $m>0$, то вверх, если $m<0$, то вниз).

Пример 1. С помощью графика функции $y=3x$ постройте график функции $y=3(x–1)+4$.

Чтобы построить график функции $y=3(x–1)+4$, график функции $y=3x$ параллельно переносится на вектор (1;4).

Пример 2. Постройте график функции $y=–2(x+3)+5$ с помощью графика функции $y=–2x+4$.

Чтобы построить график функции $y=–2(x+3)+5$ график функции $y=–2x+4$ параллельно переносится на вектор (3;1).

Пример 3. Постройте график функции $y=2–(x+3)^2$, пользуясь графиком параболы $y=x^2$.

Чтобы построить график функции $y=2–(x+3)^2$, график функции $y=x^2$ сначала сдвигается на 3 единицы влево и симметрично переносится относительно оси Ox. После этого полученный график поднимается по оси Oy на 2 единицы вверх.

Пример 4. Постройте график функции $y=\sin 2x$ с помощью графика функции $y=\sin x$.

Чтобы построить график функции $y=\sin 2x$, абсцисса каждой точки графика функции $y=\sin x$ сжимается двукратно по оси Ox вправо.

Пример 5. Постройте график функции $y=-2\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ с помощью графика функции $y=\cos x$.

△ Чтобы построить график функции $y=-2\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ или $y=-2\cos 2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$, сначала график функции $y=\cos x$ сдвигается вправо на $\frac{\pi}{8}$, потом его абсциссы сжимаются вправо в 2 раза и ординаты растягиваются вверх в 2 раза. Потом полученный график симметрично переносится по оси Ox. ▲

Пример 6. Постройте график функции $y=f(x-2)+3$, пользуясь графиком функции $y=f(x)$.

△ Для построения графика функции $y=f(x-2)+3$ каждая точка графика функции $y=f(x)$ параллельно переносится на вектор (2;3) (рис.29). ▲

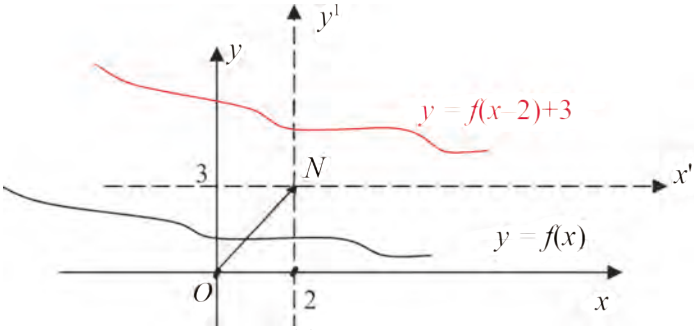


Рис.29. ▲

Пример 7. С помощью графика функции $y=f(x)$ (рис.30) постройте график функции $y=3f(2x)$ (случай $m=3$, $k=\frac{1}{2}$).

△ График функции $y=f(x)$ по оси Ox сжимается в 2 раза и по оси Oy растягивается вверх в 3 раза (рис.31). ▲

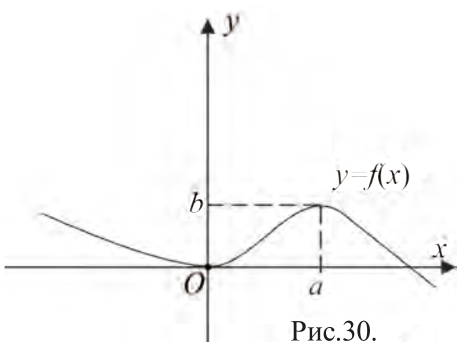


Рис.30.

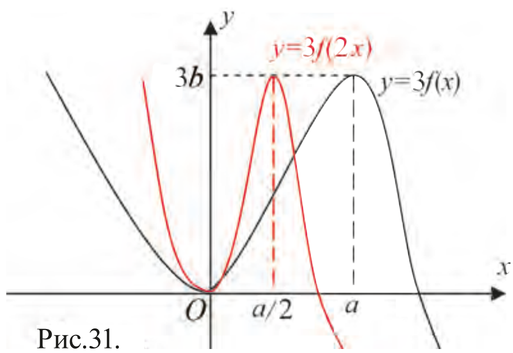


Рис.31.

Вопросы и задания

1. Что такое сдвиг? А растяжение? А параллельный перенос? Приведите примеры.

2. С помощью графика функции $y=\sin x$ постройте график функции $y=-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

Упражнения

170. С помощью графика функции $y=f(x)=x^2-2x+3$ постройте графики следующих функций:

1) $y=f(x)+1$;	2) $y=3f(x)$;	3) $y=3f(x)-2$;
4) $y=f(x-1)+1$;	5) $y=2f(x+1)+1$;	6) $y=f\left(\frac{x}{2}\right)$;
7) $y=\frac{1}{2}f(2x)$;	8) $y=f(2x)-3$;	9) $y=2f(2x)-5$.

171. С помощью графика функции $y=f(x)=x^2-5x+6$ постройте графики следующих функций:

1) $y=f(x-1)$;	2) $y=f\left(\frac{x}{3}\right)$;	3) $y=f(2x)$;	4) $y=3f\left(\frac{x}{3}\right)+1$;
5) $y=-f(x)$;	6) $y=2f(x)-3$;	7) $y=-f(-x)$;	8) $y=2f(x+1)+5$.

172. С помощью графика функции $y=\cos x$ постройте графики следующих функций:

1) $y=\cos x-1$;	2) $y=2\cos x+1$;
3) $y=-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;	4) $y=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

69-70 ГРАФИКИ ПРОСТЫХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВИДЕ

Пусть координаты $(x; y)$ материальной точки зависят от параметра t: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Каким будет множество точек $(\varphi(t), \psi(t))$ при изменении t в некотором промежутке T? Это множество называем *графиком функции, заданной в параметрическом виде.*

Пример 1. Координаты материальной точки заданы в параметрическом виде $\begin{cases} x=3t+1, \\ y=5t+8 \end{cases}$. Найдите линию *(траекторию)* материальной точки, начерченную этой материальной точкой в течение движения.

△ Из уравнений найдем параметр: $t=\frac{x-1}{3}$ и $t=\frac{y-8}{5}$.

Из полученных выражений получим уравнение $\frac{x-1}{3}=\frac{y-8}{5}$. Отсюда

$5x-5=3y-24$ или $5x-3y+19=0$. Это уравнение прямой линии.

Следовательно, искомая функция $3y=5x+19$ или $y=\frac{5}{3}x+\frac{19}{3}$.

Ответ: $y=\frac{5}{3}x+\frac{19}{3}$. ▲

Пример 2. Какой линией будет график функции, заданной в параметрическом виде: $\begin{cases} x=3+5\sin t, \\ y=-7+5\cos t \end{cases}$?

△Из заданных равенств получим: $\sin t=\frac{x-3}{5}$, $\cos t=\frac{y+7}{5}$.

Используя тождество $\sin^2 t+\cos^2 t=1$, придем к уравнению $\left(\frac{x-3}{5}\right)^2+\left(\frac{y+7}{5}\right)^2=1$. Отсюда, $(x-3)^2+(y+7)^2=25$. Это уравнение окружности с центром $(3;-7)$ и радиусом $r=5$. ▲

Пример 3. Координаты материальной точки изменяются по закону $x=7t^2+1$ и $y=3t$. Определите зависимость между x и y при $t\geq 0$.

△Из заданных закономерностей найдем t: $t=\sqrt{\frac{x-1}{7}}$, $t=\frac{y}{3}$. Из этих выражений придем к уравнению: $\frac{y}{3}=\sqrt{\frac{x-1}{7}}$. Отсюда найдем функцию $y=3\sqrt{\frac{x-1}{7}}$. Следовательно, искомая функция $y=3\sqrt{\frac{x-1}{7}}$. ▲

Пример 4. Какой линией будет график функции, заданной в параметрическом виде: $\begin{cases} x=4\sin t, \\ y=3\cos t \end{cases}$ где $0\leq t\leq 2\pi$?

△Из данных равенств найдем $\sin t=\frac{x}{4}$ и $\cos t=\frac{y}{3}$. Пользуясь тождеством $\sin^2 t+\cos^2 t=1$, получим уравнение $(\frac{x}{4})^2+(\frac{y}{3})^2=1$ или $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. Множество точек, заданное этим уравнением, называется *эллипсом* с центром в начале координат и с полуосями $a=4$, $b=3$. ▲

Вопросы и задания

Приведите примеры функций, заданных в параметрическом виде.

Упражнения

173. Координаты материальной точки заданы в параметрической форме. Найдите формулу линии (траектории материальной точки), начерченной при движении этой материальной точки. Начертите соответствующий рисунок:

1) $\begin{cases} x = 2t+1, \\ y = 4t+8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 6t+4, \\ y = 9t+3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 4t+9, \\ y = 7t+18; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 12t+11, \\ y = 15t+18. \end{cases}$

174. Координаты материальной точки заданы в параметрическом виде. Найдите зависимость между координатами x и y:

1) $\begin{cases} x = 17t^2+1, \\ y = 13t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 27t^2+21, \\ y = 23t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 37t^2+31, \\ y = 33t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 47t^2+41, \\ y = 43t. \end{cases}$

175. Из какой линии состоит график функции, заданной в параметрическом виде? Начертите соответствующий рисунок:

1) $\begin{cases} x = 7\sin t, \\ y = 7\cos t, \\ 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t, \\ 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 5\sin t, \\ y = 5\cos t, \\ 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 9\sin t, \\ y = 9\cos t, \\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

176. Из какой линии состоит график функции, заданной в параметрическом виде? Начертите соответствующий рисунок:

1) $\begin{cases} x = 6\sin t+3, \\ y = 6\cos t+7, \\ 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 3\sin t, \\ y = 3\cos t-1, \\ 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 2\sin t-3, \\ y = 2\cos t+7, \\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

71 ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

Степень и ее свойства

Степень с действительным числовым показателем обладает следующими свойствами ($a>0$, $a\neq1$):

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; 2) $a^x : a^y = a^{x-y}$; 3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$;

4) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$; 5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$;

6) если $0<a<b$ и $x>0$, то $a^x<b^x$;

7) если $0<a<b$ и $x<0$, то $a^x>b^x$;

8) если $x<y$ и $a>1$, то $a^x<a^y$;

9) если $x<y$ и $0<a<1$, то $a^x>a^y$.

Пример 1. Сравните: $2^{-\sqrt{3}}$ и $3^{-\sqrt{3}}$.

△ Так как $0<2<3$ и $-\sqrt{3}<0$, то по свойству 7 имеем $2^{-\sqrt{3}} > 3^{-\sqrt{3}}$. ▲

Пример 2. Сравните: $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,2}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,3}$.

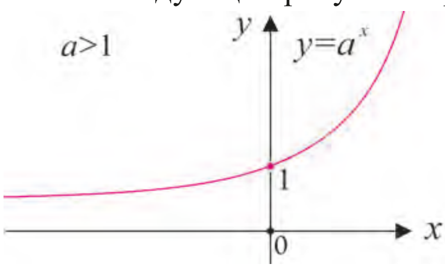
△ Так как $0,2<0,3$ и $0<\frac{1}{2}<1$, то по свойству 9 имеем: $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{0,3}$. ▲

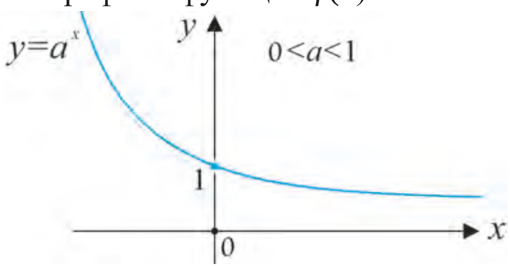
Показательная функция и ее свойства

Функция вида $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq1$ называется *показательной функцией*. Данная функция обладает следующими свойствами.

1) Область определения промежуток $(-\infty;\ +\infty)$;
2) Область значений промежуток $(0;\ +\infty)$;
3) Для всех $a(a>0,\ a\neq1)$ справедливо $a^0=1$;
4) Если $a>1$, то функция возрастающая;
5) Если $0<a<1$, то функция убывающая.

В следующих рисунках приведены графики функции $f(x)=a^x$.





Вопросы и задания

1. Расскажите о свойствах степени с действительным числовым показателем. Приведите примеры.
2. Расскажите о свойствах показательной функции.

Упражнения

177. Вычислите:

1) $\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; 2) $9^{\sqrt{3}}:3^{2\sqrt{3}}$ 3) $\left(2^{\sqrt[3]{4}}\right)^{\sqrt[3]{2}}$; 4) $4^{6\sqrt{2}-1}\cdot16^{1-3\sqrt{2}}$.

Сравните (**178–179**):

178. 1) $2^{-\sqrt{3}}$ и 1; 2) $4^{-\sqrt{6}}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^4$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}$ и 1.

179. 1) $-3^{\sqrt{2}}$ и 1; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{2}}$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$.

180. Определите, возрастают или убывают функции (**180–182**):

1) $y=4^x$; 2) $y=-3^x$; 3) $y=5^x-2$; 4) $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+1$?

181. 1) $y=\sqrt{3}^{x}$; 2) $y=(\frac{1}{\sqrt{3}})^{x}$; 3) $y=(\frac{\pi}{3})^{x}$; 4) $y=(\sqrt{3}-1)^{x}$.

182. 1) $y=(\sqrt{3}-1)^{-x}$; 2) $y=(\sqrt{10}-2)^{x}$; 3) $y=\left(\pi-\sqrt{2}\right)^{x}-3$.

72-74 НЕПОСРЕДСТВЕННО РЕШАЕМЫЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕ РАВЕНСТВА

Неравенство вида $a^{f(x)}>a^{g(x)}$, $a>0$, $a\neq 1$

Неравенство $a^{f(x)}>a^{g(x)}$, $a>0$, $a\neq 1$ является примером показательного неравенства. Это неравенство при $a>1$ равносильно неравенству $f(x)>g(x)$, а при $0<a<1$ равносильно неравенству $f(x)<g(x)$.

Пример 1. Решите неравенство $3^{x+5}>3^{2-5x}$.

△ Поскольку $a=3>1$, заданное неравенство равносильно неравенству $x+5>2-5x$. Отсюда находим, что $6x>-3$ или $x>-0,5$. Следовательно, решение неравенства состоит из промежутка $(-0,5;\ \infty)$.
Ответ: $x\in(-0,5;\ \infty)$. ▲

Пример 2. Решите неравенство $2\cdot 3^{x+2}-2\cdot 3^{x+1}-5\cdot 3^{x}<63$.

△ 3^x вынесем за скобки: $3^x(2\cdot 3^2-2\cdot 3-5\cdot 1)<63$. Упростив, получим неравенство $3^x<9$. Отсюда $x<2$. *Ответ*: $x\in(-\infty;\ 2)$. ▲

Пример 3. Решите неравенство $8^{5x^2-46}\geq 8^{2(x^2+1)}$.

△ Поскольку $a=8>1$, то неравенство равносильно неравенству $5x^2-46\geq 2(x^2+1)$. Решим это неравенство: $3x^2\geq 48$, отсюда $x^2\geq 16$. Следовательно, решение заданного неравенства $x\in(-\infty;\ -4]\cup[4;\ +\infty)$. ▲

Очевидно, что решения неравенства $a^x<b$ $(a>0,\ a\neq 1)$ при $b<0$ нет и решение неравенства $a^x>b$ при $b>0$ состоит из отрезка $(-\infty;+\infty)$.

Пример 4. Решите неравенство $4^x+2^x-6\geq 0$.

△ Введем замену переменной: $2^x=t$, в результате получится квадратное неравенство $t^2+t-6\geq 0$. Отсюда найдем, что $t\leq -3$, $t\geq 2$ и придем к неравенствам: $2^x\geq 2$ $2^x\leq -3$. Из первого неравенства находим решение $x\geq 1$, а у второго неравенства нет решения. Следовательно, решение заданного неравенства состоит из промежутка $[1;\ +\infty;)$ *Ответ*: $x\in[1;\ +\infty)$. ▲

Вопросы и задания

Дайте сведения по неравенству $a^{f(x)}>a^{g(x)}$, $a>0$, $a\neq 1$. Приведите пример.

Упражнения

183. Решите неравенство (**183–184**):

1) $4^{3x+5} \le 4^{3-5x}$; 2) $7^{4x+5} < 7^{9-5x}$; 3) $6^{x+5} > 6^{3x}$, 4) $8^{x+5} \le 8^{2-5x}$;
5) $11^{x} < 11^{2+5x}$; 6) $2^{x-5} > 2^{25x}$; 7) $2 \cdot 2^{x+2} - 3 \cdot 2^{x+1} - 5 \cdot 2^{x} \le -6$;
8) $3 \cdot 5^{x+3} - 5^{x+2} - 2 \cdot 5^{x+1} < 68$; 9) $2 \cdot 4^{x+2} + 4^{x+1} - 5 \cdot 4^{x} \le 31$;
10) $2 \cdot 7^{x+2} - 2 \cdot 7^{x+1} - 14 \cdot 7^{x} < 10$. 11) $13^{x^2+46} \le 13^{x^2+25x}$;
12) $3^{x^2-4x} < 3^{2\left(x^2-15\right)}$; 13) $7^{2x^2-4} \le 7^{3(x^2-x)}$.

184. 1) $9^{x} + 3^{x} - 6 \le 84$; 2) $25^{x} + 5^{x} - 30 > 0$;
3) $5 \cdot 4^{x} + 2^{x} - 6 \le 0$; 4) $9^{x} + 3^{x} - 12 > 0$.

Образец контрольной работы

1. Постройте график функции вида $\begin{cases} x = 7\sin 5t, \\ y = 7\cos 5t. \end{cases}$
2. Напишите свойства функции $y = 11^{x} + 7$.

Решите неравенства (**3–5**):

3. $6^{x^2-7x-1} < 6^{7}$. 4. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{17x} \ge \left(\dfrac{1}{2}\right)^{54-x}$. 5. $0{,}7^{-3x} \le 1$.

75-78 ПОНЯТИЕ О ЛОГАРИФМЕ. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ. ПРОСТЕЙШИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Понятие о логарифме

Корень уравнения $2^{x}=32$ есть $x=5$, но как находится корень уравнения $2^{x}=30$? Для решения подобных уравнений вводится понятие логарифма числа. Уравнение $2^{x}=30$ *имеет единственное решение.* Его можно увидеть на рис. 32.

Этот корень называется логарифмом числа 30 по основанию 2 и обозначается так: $\log_2 30$. Следовательно, корень уравнения $2^{x}=30$ есть число $x=\log_2 30$.

Введем следующее определение:

Логарифмом числа b по данному основанию a называется показатель степени, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число b. Обозначается так: $\log_a b$. Основание должно удовлетворять условие $a>0$ и $a \ne 1$.

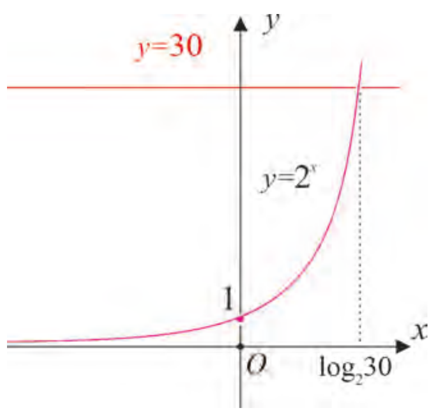


Рис.32.

Например, $\log_3 9=2$, так как $9=3^2$. Также, $\log_2\frac{1}{8}=-3$; $\log_5 5=1$; $\log_7 1=0$.

Пример 1. Вычислите: $\log_3 81$.

Так как $3^4=81$, по определению логарифма $\log_3 81=4$.

Свойства логарифма

- Основное логарифмическое тождество: если $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, то справедливо равенство: $a^{\log_a b}=b$;
- Если $a>0$, $a\neq 1$, то $\log_a 1=0$; $\log_a a=1$;
- Если $a>0$, $a\neq 1$ и $x>0$, $y>0$, то $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$;
- Если $a>0$, $a\neq 1$ и $x>0$, $y>0$, то $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$;
- Если $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$, то $\log_a x^n=n\cdot\log_a x$;
- Формула перехода к новому основанию (от одного основания к другому): если $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$, $b>0$, $b\neq 1$, то $\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$;
- Если $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$, то $\log_a b\cdot\log_b a=1$.

Приняты обозначения: $\log_{10}x=\lg x$ и $\log_e x=\ln x$ ($e=2{,}718281...$).
Здесь $\lg x$ называется десятичным логарифмом x, а $\ln x$ - натуральным логарифмом x. Функция $f(x)=\log_a x$ (где x – аргумент, а $a>0$, $a\neq 1$) называется *логарифмической функцией* с основанием a.

Свойства логарифмической функции:

- область определения: промежуток $(0;\ +\infty)$;
- область значений: $\mathbb{R}=(-\infty;\ +\infty)$;
- ее нуль: $x=1$, т.е. $\log_a 1=0$.
- если $a>1$, то логарифмическая функция возрастает на промежутке $(0;\ +\infty)$;
- если $0<a<1$, то логарифмическая функция убывает на промежутке $(0;+\infty)$.

Пример 2. Сравните: $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$ и 0.

$\log_{\frac{1}{2}}1=0$, основание $a=\frac{1}{2}$, т.е. функция убывающая. Из $0<\frac{1}{2}<1$ и $0<\frac{1}{3}<1$ следует $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}>\log_{\frac{1}{2}}1$. Следовательно, $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}>0$.

Пример 3. Найдите область определения функции $f(x)=\log_2\frac{x^2-5x+6}{x-1}$.

Область определения этой логарифмической функции есть множество всех значений x, удовлетворяющих неравенство $\frac{x^2-5x+6}{x-1}>0$. Решив это неравенство, найдём область определения функции: $x \in (1; 2) \cup (3; +\infty)$. ▲

На рис. 33 и 34 графики функций $y=a^x$ и $y=\log_a x$ (для случаев $a>1$ и $0<a<1$) изображены вместе.

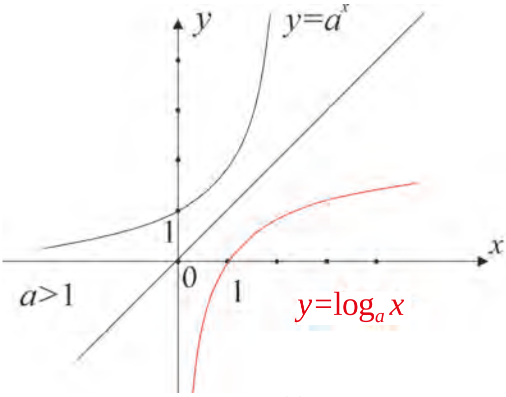


Рис.33.

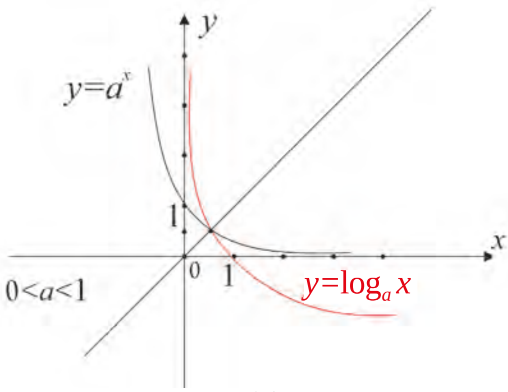


Рис.34.

Пример 4. Сравните: $\log_3 2+\log_3 8$ и $\log_3(2+8)$.

△Воспользуемся свойствами логарифма: $\log_3 2+\log_3 8=\log_3(2\cdot 8)=\log_3 16$; $\log_3(2+8)=\log_3 10$. Так как основание логарифма $3>1$, то $\log_3 16>\log_3 10$. Отсюда: $\log_3 2+\log_3 8>\log_3(2+8)$. ▲

Пример 5. Вычислите: $A=4^{\log_8 125}+27^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\log_3 4}$.

△Воспользуемся свойствами логарифма: $\frac{1}{2}\log_3 4=\log_3 2$;

$\log_8 125=\dfrac{\log_2 125}{\log_2 8}=\dfrac{3\log_2 5}{3}=\log_2 5$; $\quad 4^{\log_8 125}=4^{\log_2 5}=2^{2\log_2 5}=2^{\log_2 25}=25.$

Также, $27^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\log_3 4}=27^{\frac{1}{3}-\log_3 2}=27^{\frac{1}{3}}\cdot 27^{-\log_3 2}=$

$=3\cdot 3^{-3\log_3 2}=3\cdot 3^{\log_3\frac{1}{8}}=3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$. Следовательно, $A=25+\frac{3}{8}=25\frac{3}{8}$. ▲

Пример 6. Вычислите: $\dfrac{\lg 54+\lg\frac{1}{2}}{\lg 72-\lg 8}$.

△Воспользуемся свойствами логарифма:

$$\lg 54+\lg\frac{1}{2}=\lg(54\cdot\frac{1}{2})=\lg 27=\lg 3^3=3\lg 3,$$

$$\lg 72-\lg 8=\lg\frac{72}{8}=\lg 9=\lg 3^2=2\lg 3.$$

Тогда: $\dfrac{\lg 54+\lg \frac{1}{2}}{\lg 72-\lg 8}=\dfrac{3\lg 3}{2\lg 3}=\dfrac{3}{2}$. *Ответ*: $\dfrac{3}{2}$. ▲

Простейшее логарифмическое уравнение

Уравнение вида $\log_a x=b$ ($a>0$, $a\neq 1$, b – действительное число) можно назвать *простейшим логарифмическим уравнением*. Единственное решение уравнения: $x=a^b$.

Пример 7. Решите уравнение: $\log_3 x=\frac{1}{2}$.

△ По определению логарифма, решение: $x=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$. *Ответ*: $x=\sqrt{3}$. ▲

Пример 8. Решите уравнение: $\log_x 16=2$.

△ По определению логарифма, $x^2=16$ и $x>0$, $x\neq 1$. Следовательно, решение уравнения: $x=4$. *Ответ*: $x=4$. ▲

Пример 9. Решите уравнение: $\log_2(x^2-5x+10)=4$.

△ По определению логарифма получим уравнение $x^2-5x+10=2^4$. Решив квадратное уравнение, найдем корни: $x_1=-1$, $x_2=6$. Следовательно, решение уравнения: $\{-1; 6\}$. *Ответ*: $x=-1$, $x=6$. ▲

Пример 10. Решите уравнение: $\lg(2x-3)=\lg(x-1)$.

△ По определению логарифма должно быть $2x-3>0$, $x>1$. Область определения уравнения есть промежуток $x>\frac{3}{2}$. По свойству логарифма получим уравнение: $2x-3=x-1$, отсюда $x=2$. Этот корень принадлежит области определения. *Ответ*: $x=2$. ▲

Пример 11. Решите уравнение: $\log_x(x+2)=2$.

△ Найдем область определения уравнения: $x+2>0$ $x>0$, $x\neq 1$, т.е. уравнение определено на множестве $(0;1)\cup(1;\infty)$. По определению логарифма получим уравнение $x+2=x^2$. Решив это квадратное уравнение, найдем корни: $x_1=-1$, $x_2=2$. Из этих корней только $x_2=2$ принадлежит области определения. И поэтому он является решением заданого уравнения. *Ответ*: $x=2$. ▲

Пример 12. Решите уравнение: $\log_3^2 x-5\log_3 x+6=0$.

△ Введя обозначение $t=\log_3 x$, получим квадратное уравнение $t^2-5t+6=0$. Решив его, находим корни $t=2$ и $t=3$. Подставляя эти корни в $t=\log_3 x$, получим равенства: $\log_3 x=2$ и $\log_3 x=3$. Решения этих уравнений соответственно 9 и 27. *Ответ:* $x=9$, $x=27$. ▲

Простейшее логарифмическое неравенство

Неравенство вида $\log_a x > b$ ($a>0$, $a\neq 1$, b – действительное число) будем называть *простейшим логарифмическим неравенством.*

Пример 13. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) > -3$.

△ Должно быть $3-x>0$. Из $-3=\log_{\frac{1}{2}} 8$ имеем $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) > \log_{\frac{1}{2}} 8$. Так как основание $a=\frac{1}{2}<1$, логарифмическая функция убывающая, следовательно, $3-x<8$ и $0<3-x<8$. Отсюда $-3<-x<5$ или $-5<x<3$. *Ответ*: $x\in(-5;\ 3)$. ▲

Пример 14. Решите неравенство $\lg(x+1) < \lg(2x-3)$.

△ Из свойств логарифмической функции получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x+1<2x-3, \\ x+1>0, \\ 2x-3>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x>4, \\ x>-1, \\ x>\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Решение этой системы есть промежуток $(4;\ +\infty)$. *Ответ*: $x\in(4;\ +\infty)$. ▲

Пример 15. Решите неравенство $\log^2_{\frac{1}{2}} x - 9 \leq 0$.

△ По определению логарифмической функции должно быть $x>0$. Введем обозначения $t=\log_{\frac{1}{2}} x$. Тогда получим неравенство $t^2-9\leq 0$. Решив его, получим $-3\leq t\leq 3$, т.е. неравенства $-3\leq \log_{\frac{1}{2}} x\leq 3$. Так как $-3=\log_{\frac{1}{2}} 8$; $3=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}$, то $\log_{\frac{1}{2}} 8 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}$. Основание $a=\frac{1}{2}<1$, поэтому, функция $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ убываюшая, следовательно, должно быть $\frac{1}{8}\leq x\leq 8$. *Ответ*: $x\in[\frac{1}{8};8]$. ▲

Вопросы и задания

1. Дайте определение логарифма. Приведите пример.
2. Изложите свойства логарифма. Объясните на примере.
3. Изложите свойства логарифмических функций.
4. Что такое простейшее логарифмическое уравнение и как оно решается?

5. Что такое простейшее логарифмическое неравенство и как оно решается?

Упражнения

185. Вычислите:

1) $\log_5 125$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 9$; 3) $\log_5 0{,}04$; 4) $\log_{0,1} 1000$; 5) $\log_3 \frac{1}{27}$.

186. Сравните:

1) $\log_2 3$ и $\log_2 5$; 2) $\frac{\log_2 3}{\log_2 5}$ и $\log_5 4$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ и $\log_{\frac{1}{2}} 5$;

4) $\log_2 3$ и 1; 5) $\log_3 2 + \log_3 5$ и $\log_3(2+5)$; 6) $\log_7 \frac{1}{2}$ и 0.

187. Вычислите:

1) $1{,}5^{\log_{1,5} 2}$; 2) $e^{\ln 5}$; 3) $2^{3\log_2 5}$; 4) $3^{2+\log_3 5}$; 5) $7^{-2\log_7 6}$;

6) $3^{3-\log_3 54}$; 7) $\log_6 2 + \log_6 18$; 8) $\lg 25 + \lg 4$; 9) $\log_3 \frac{5}{9} + \log_3 \frac{1}{5}$;

10) $\frac{\lg 2 + \lg 162}{2\lg 3 + \lg 2}$; 11) $\log_4 7 - \log_4 \frac{7}{16}$; 12) $\frac{\ln 64}{\ln 4}$.

188. Найдите область определения функций:

1) $y = \log_3(2x-5)$; 2) $y = \log_7(x^2 - 2x - 3)$; 3) $y = \log_5(4 - x^2)$.

4) $y = \log_2(x^2 - 2x + 1)$; 5) $y = \log_{\sqrt{2}}(3 - x)$; 6) $y = \log_2 \frac{x-1}{x+2}$.

189. Начертите график функции:

1) $y = \log_2 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; 3) $y = \log_4(x-1)$; 4) $y = -\log_3 x$.

190. Решите уравнения:

1) $\log_2 x = -5$; 2) $\log_{\sqrt{3}} x = 0$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$; 4) $\log_x 128 = 7$;

5) $\log_9 x = \frac{1}{2}$; 6) $\log_{\sqrt{x}} 27 = 3$; 7) $\log_3 x = 5$;

8) $\log_2(x-5) = \log_2(4x+1)$; 9) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$; 10) $\log_5(3-2x) = \log_{\frac{1}{5}} x$;

11) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-6) = -2$; 12) $\log_2(x+1) + \log_2(8-x) = 3$; 13) $\log_x 5 = 2$;

14) $\lg(x^2+x-10)-\lg(x-3)=1$; | 15) $\log_7^2 x - \log_7 x = 2$;

16) $5^{4-x}=6$; | 17) $\log_x 3+\log_3 x=2$; | 18) $5^{x^2}=6$; | 19) $5^{x^2}=\frac{1}{2}$;

20) $\lg(x^2-6x+19)=1$; | 21) $\log_5(5^x-4)=1-x$; | 22) $\lg(x^2-21)=2$.

191. Решите неравенства:

1) $\log_8 x>2$; | 2) $\log_3^2 x-3>2\cdot\log_3 x$; | 3) $\log_8 x<2$; | 4) $\log_{\frac{1}{2}} x>1$;

5) $\lg(3-2x)>1$; | 6) $2^{x+1}<3$; | 7) $\log_3(2x-4)<\log_3(x+1)$; | 8) $2^{|x+1|}>3$.

79-81 МОДЕЛИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЙ

Пример 1. Бактерия через определенное время (через несколько часов или минут) делится на две, при этом популяция (общее количество бактерий) бактерий увеличивается вдвое. Через определенное время эти две бактерии тоже делятся и популяция снова увеличивается вдвое: теперь бактерий стало четыре. Этот процесс размножения продолжается в благоприятных для размножения бактерий условиях: приемлемая среда обитания, наличие питательных веществ, воды.

Допустим, что сначала имелись десять миллионов бактерий и известно, что бактерии делятся через час. Следующая таблица выражает изменения количества бактерий в течение t = 1, 2, 3, 4 часов:

t (час)	0	1	2	3	4
b_t (миллион)	10	20	40	80	160

Вместе с тем, известно, что не все бактерии одновременно, синхронно делятся на две. В таком случае возникает задача нахождения популяции бактерий при не целом t (например, при $t=1\frac{1}{2}$ часов).

a) Какую последовательность представляет последовательность $b_1, b_2, \ldots$?

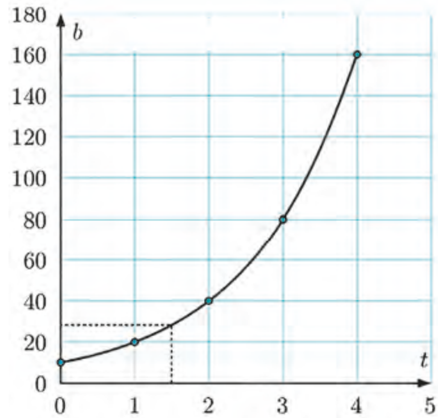
b) На прямоугольной координатной плоскости отметьте соответствующие точки на таблице и полученные точки соедините плавной кривой линией.

c) Какова будет популяция бактерий через $t=1\frac{1}{2}$ часов?

d) С помощью какой функции можно описать изменение популяции бактерий с течением времени t?

△ Ясно, что числовая последовательность $b_1, b_2, \ldots$ в второй строке таблицы является геометрической прогрессией со знаменателем 2. Её общий член имеет вид: $b_t = 20 \cdot 2^{t-1}$, где t = 1, 2, 3, 4...

Отметим соответствующие точки в координатной системе на плоскости и соединим полученные точки плавной кривой.



Заметим что через $t = 1\frac{1}{2}$ часов популяция бактерий приблизительно будет равна 28 миллионов бактерий.

Видно, что полученная кривая имеет форму, подобную графику некоторой показательной функции. Обозначив эту функцию через $b(t)$, (где $t \geq 0$), можем написать: $b(t) = 20 \cdot 2^{t-1} = 10 \cdot 2^t$.▲

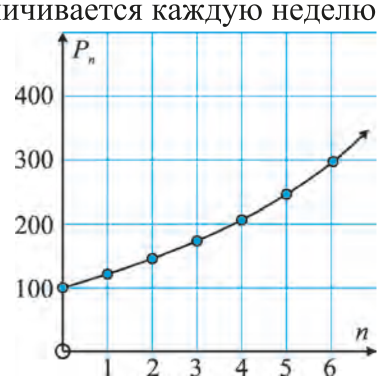
В общем случае, величина, изменяющаяся по закону, $b(t) = b_0 a^t$ (где $b_0 > 0,\ a > 1,\ t \geq 0$) называется *экспоненциально возрастающей величиной.*

Сделаем вывод:

Если популяция растет пропорционально начальному количеству бактерий, то такая популяция возрастает экспоненциально.

Выражение “экспоненциальный рост” обычно определяет некоторый, растущий бурно процесс. Вы встречали в средствах массовой информаций сообщения о бурном росте популяции животных, населения некоторых стран с использованием данного выражения.

Пример 2. По сведениям эпидемиологической службы, количество популяции мышей в благоприятных условиях увеличивается каждую неделю на 20%. Если в начале было 100 мышей, то найдите закономерность роста их популяции.



△Если обозначим через P_n количество мышей за n недель, тогда:

P_0=100 (начальное количество),

$P_1 = P_0 \cdot 1{,}2 = 100 \cdot 1{,}2$,

$P_2 = P_1 \cdot 1{,}2 = 100 \cdot (1{,}2)^2$, $P_3 = P_2 \cdot 1{,}2 = 100 \cdot (1{,}2)^3$,

и т.д. Популяция за n недель составит $P_n = 100 \cdot (1{,}2)^n$ мышей.▲

Вычислив (с помощью калькулятора) соответствующие значения, получим вышеуказанный график.

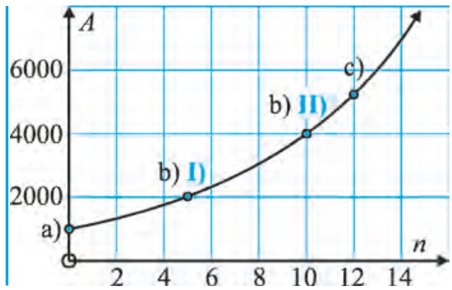
Как видно из графика, за 6 недель популяция мышей увеличится почти в 3 раза.

Пример 3. Ученый-энтомолог при изучении степени урона, нанесенного саранчой сельскохозяйственным угодьям, определил, что площадь полей, которым был нанесен урон, изменяется по закону $A_n=1000\cdot 2^{0,2n}$ (га.), где n – число недель.

a) Найдите площадь полей, которым был нанесен урон вначале?

b) Найдите площадь полей, которым будет нанесен урон: за **I)** 5; **II)** 10 недель?

c) Пользуясь микрокалькулятором, найдите площадь полей, которым был нанесен вред за 12 недель:



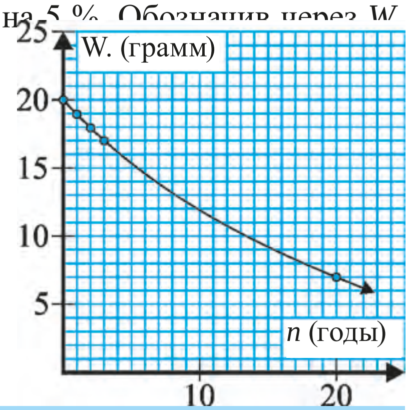
d) Начертите график зависимости между площадью, которым был нанесён урон и числом недель.

△ a) $A_0=1000\cdot 2^{0,2\cdot 0}=1000$ (га.). Следовательно, вначале нанесен урон площади в 1000 га.

b) **I)** $A_3=1000\cdot 2^{0,2\cdot 5}=2000$; площадь полей, которым нанесен урон, равна 2000 га. **II)** $A_{10}=1000\cdot 2^{0,2\cdot 10}=4000$; площадь полей, которым нанесен урон, равна 4000 га.

c) $A_{12}=1000\cdot 2^{0,2\cdot 12}=1000\cdot 2^{2,4}\approx 5280$; площадь полей, которым нанесен урон, приблизительно равна 5280 га. ▲

Пример 4. В результате радиоактивного распада радиоактивное вещество массой 20 граммов каждый год уменьшается на 5 %. Обозначив через W массу вещества через n лет, имеем



следующие равенства:

$W_0=20$ г;

$W_1=W_0\cdot 0,95=20\cdot 0,95$ г;

$W_2=W_1\cdot 0,95=20\cdot (0,95)^2$ г;

$W_3=W_2\cdot 0,95=20\cdot (0,95)^3$ г;…

$W_{20}=20\cdot (0,95)^{20}\approx 7,2$ г;…

$W_{100}=20\cdot (0,95)^{100}\approx 0,1$ г.

Отсюда $W_n=20\cdot (0,95)^n$.

Величина, изменяющаяся по закону $b(t)=b_0a^t$ (здесь $b_0>0,\ 0<a<1,\ t\geq 0$), называется *экспоненциально убывающей величиной.*

Пример 5. Введенное в организм лекарство медленно рассасывается в по закону $D(t)=120\cdot (0,9)^t$ (мг), где $D(t)$ –масса оставшегося в организме количества лекарства через t часов.

a) Найдите $D(t)$ при $t=0$, 4, 12, 24 часов.

b) Какая доза была введена вначале в организм человека?

c) Используя полученные в *a)* сведения, изобразите график $D(t)$, где $t \geq 0$.

d) Пользуясь графиком, оцените время сохранения в организме человека лекарства массы 25 мг.

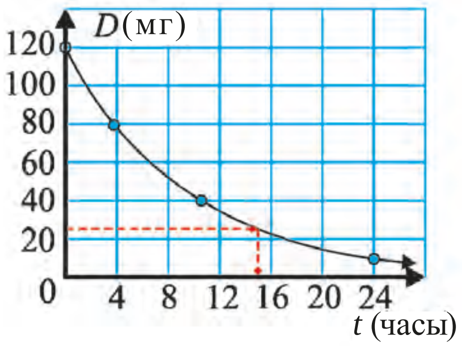
a) $D(t)=120\cdot(0{,}9)^t$ мг

$D(0)=120\cdot(0{,}9)^0=120$ мг; $D(4)=120\cdot(0{,}9)^4\approx 78{,}7$ мг;

$D(12)=120\cdot(0{,}9)^{12}\approx 33{,}9$ мг; $D(24)=120\cdot(0{,}9)^{24}\approx 9{,}57$ мг;

b) Поскольку $D(0)=120$, то вначале было введено 120 мг лекарства.

c)



Пользуясь этим графиком, определим, что из 120 мг введенного в организм человека лекарства через 15 часов останется приблизительно 25 мг.

Пример 6. Масса радиоактивного вещества в результате радиоактивного распада изменяется по закону $W_t=W_0\cdot 2^{-0{,}001t}$ (г), где t – годы.

a) Какую массу имело вещество вначале?

b) Сколько процентов вещества останется через 200 лет?

При $t=0$ будет $W_t=W_0\cdot 2^0=W_0$. Следовательно, начальная масса вещества была W_0. При $t=200$ $W_{200}=W_0\cdot 2^{-0{,}001\cdot 200}=W_0\cdot 2^{-0{,}2}\approx W_0\cdot 0{,}8706$. Следовательно, через 200 лет останется приблизительно 87,1% вещества.

Пример 7. При подъеме на высоту h км над уровнем моря атмосферное давление изменяется по закону $p=76\cdot 2{,}7^{-\frac{h}{8}}$ (мм ртутного столба). Определите самостоятельно, каким будет атмосферное давление на высоте 5,6 км над уровнем моря?

Пример 8. Ясно, что высота вычисляется по формуле $h=\dfrac{8000}{0{,}4343}\lg\dfrac{p_0}{p}$, где $p_0=760$ мм ртутного столба – атмосферное давление на уровне моря, а p – атмосферное давление на высоте h (м). Поднявшись на гору, альпинисты определили, что давление стало равным 304 мм ртутного столба. На какую высоту поднялись альпинисты?

$$h=\frac{8000}{0{,}4343}\lg\frac{760}{304}\approx 7330{,}2 \text{ м.}$$

Пример 9. Масса радиоактивного вещества с течением времени убывает по закону $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, здесь m_0 – начальная масса, m – масса во время t, T – коэффициент, выражающий скорость распада (период полураспада).

Если мы знаем массу m сохранившегося вещества в данный момент, то можем найти за сколько лет масса m_0 уменьшится до m:

$$t = -T\log_2\left(\frac{m(t)}{m_0}\right).$$

Отметим, что это соотношение применяется в археологических исследованиях.

Пример 10. Число слов в словаре естественного языка убывает с течением времени по закону $N(t)=N_0 \cdot e^{-\lambda t}$, где N_0 – начальное количество слов, $N(t)$ – количество слов в момент времени t (тысячелетия), λ – коэффициент, выражающий степень сохранения слов в языке.

Если мы знаем количество $N(t)$ сохранившихся слов в настоящее время, то можем найти, за сколько лет объем словаря уменьшится от N_0 до $N(t)$:

$$t = -\frac{1}{\lambda}\cdot\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right).$$

Задача 11. Известно, что вначале население города составляло a человек, причем ежегодно число жителей города увеличивается на 10%. Найдите чему равно население через x лет.

△ По формуле сложных процентов, население города через x лет будет: $y = a\cdot\left(\frac{100+10}{100}\right)^x = a\cdot(1{,}1)^x$. Следовательно, с помощью формулы $y=a\cdot 1{,}1^x$ при данном a можно определить число населения через x лет. Приведем таблицу определения числа жителей по a=1000000 через число лет x:

x	y	x	y
1	1 100 000	11	2 853 117
2	1 210 000	12	3 138 428
3	1 331 000	13	3 452 271
4	1 464 100	14	3 797 498
5	1 610 510	15	4 177 248
6	1 771 561	16	4 594 973
7	1 948 717	17	5 054 470
8	2 143 589	18	5 559 917
9	2 357 948	19	6 115 909
10	2 593 742	20	6 727 500

По таблице найдем, что число жителей через 5 лет будет 1 610 510, через 10 лет 2 593 742, а через 20 лет 6 727 500 чел. ▲

Задача 12. Если вначале население города было a человек, а ежегодно число населения уменьшается на 2 %, то найдите формулу определения числа населения города через x лет.

△ По формуле сложных процентов население города через x лет будет составлять $y = a \cdot \left(\frac{100-2}{100}\right)^x = a \cdot 0,98^x$. Следовательно, из равенства $y = a \cdot 0,98^x$ при данном a можно найти число жителей через x лет. Приведем таблицу, определяющую число населения города при a=2 000 000 через x лет. По таблице найдем, что число жителей через 5 лет будет 1 807 842, через 10 лет 1 634 146, а через 20 лет 1 335 216 чел. ▲

x	y	x	y
1	1 960 000	11	1 601 463
2	1 920 800	12	1 569 433
3	1 882 384	13	1 538 045
4	1 844 736	14	1 507 284
5	1 807 842	15	1 477 138
6	1 771 685	16	1 447 595
7	1 736 251	17	1 418 644
8	1 701 526	18	1 390 271
9	1 667 496	19	1 362 465
10	1 634 146	20	1 335 216

Задача 13. Известно, что население города вначале составляло a человек, причем число жителей ежегодно увеличивается на 10 %. Найдите формулу определения числа жителей через x лет. За сколько лет оно увеличится в k раз.

△ Ясно, что $y = a \cdot 1,1^x$. Учитывая, что по условию задачи $y = k \cdot a$, находится формула $k = 1,1^x$ или $x = \log_{1,1} k$. Приведем таблицу, определящую необходимое число лет для увеличения числа населения в k раз:

k	y	k	y	k	y
1	0	6	19	11	25
2	7	7	20	12	26
3	12	8	22	13	27
4	15	9	23	14	28
5	17	10	24	15	28

Из таблицы видно, что для увеличения числа жителей:

в 2 раза необходимо 7 лет;
в 5 раз необходимо 17 лет;
в 10 раз необходимо 24 года. ▲

Задача 14. Если население города ежегодно убывает на 2% и начальное число жителей было a человек, то найдите формулу, определяющую число населения через x лет, и через сколько лет уменьшится число жителей в k раз.

△Известно, что $y=a\cdot 0{,}98^x$, и учитывая из условия задачи $y=\frac{a}{k}$, найдем $1/k=0{,}98^x$ или $x=\log_{0,98}(1/k)$. Ниже приведена таблица, определяющая количество лет, необходимых для уменьшения населения в k раз:

k	$1/k$	x	k	$1/k$	x
1	1	0	11	0,090909	119
2	0,5	34	12	0,083333	123
3	0,333333	54	13	0,076923	127
4	0,25	69	14	0,071429	131
5	0,2	80	15	0,066667	134
6	0,166667	89	16	0,0625	137
7	0,142857	96	17	0,058824	140
8	0,125	103	18	0,055556	143
9	0,111111	109	19	0,052632	146
10	0,1	114	20	0,05	148

Из таблицы видно, что для уменьшения числа жителей:

в 2 раза необходимо 34 года;
в 5 раз необходимо 80 лет;
в 10 раз необходимо 114 лет..▲

Задача 15. В 1935 году для классификации землетрясений американский сейсмолог Ч. Рихтер предложил 1 – 9,5 балльную шкалу магнитуд. Здесь возникающая сейсмическая волновая энергия во время землятресения оценивается величиной, названной интенсивностью. По шкале Рихтера, магнитуда R землетрясения с интенсивностью I находится по формуле $R=\lg I$.

В 1966 году в городе Ташкенте произошло землетрясение магнитудой 5,2, а в 2010 году в Гаити произошло землетрясение магнитудой 7. Сравним эти землетрясения по интенсивности:

△ Землетрясение в Гаити: $7=\lg I_1$, отсюда $I_1=10^7=10\,000\,000$;
Ташкентское землетрясение: $5{,}2=\lg I_2$, отсюда $I_2=10^{5,2}\approx 158\,489{,}3$.

Отсюда $\frac{I_1}{I_2}\approx 63{,}1$. Следовательно, в Гаити землетрясение произошло с интенсивностью приблизительно в 63 раза больше, чем в городе Ташкенте.▲

Вопросы и задания

1. Приведите пример показательной модели.
2. Приведите пример логарифмической модели.

Упражнения

192. Если не обрабатывать приусадебный огород во дворе, то за t дней сорные травы нанесут урон растениям на площади в $A(t)=3\cdot 2^{0,1t}$ (кв.м.)

a) На какой площади был нанесен урон вначале?

b) На какой площади будет нанесен вред за: **I)** 2 дня, **II)** 10 дней, **III)** 30 дней?

c) Пользуясь полученными в *a), b)* сведениями, начертите график зависимости площади, которой был нанесен урон от числа дней.

193. В целях восстановления экологической системы Приаралья, в проекте увеличения популяции редких животных экологи планируют размножить 25 пар животных. По исследованиям, в данных условиях популяция этих животных изменяется по закону $P_n=P_0\cdot 1{,}23^n$, где P_n – число животных через n лет.

a) Что означает число P_0 ?

b) Какую популяцию получим за **I)** 2; **II)** 5; **III)** 10 лет ?

c) Пользуясь полученными сведениями, в *a), b)* начертите график закономерности связи количества популяции к количеству лет.

194. Скорость химической реакции изменяется по закону $V_t=V_0\cdot 2^{0,05t}$, где t(°C) – температура.

Какова скорость реакции при температуре: a) 0 °C; b) 20 °C?

c) На сколько процентов увеличится скорость реакции при температуре 20° C по отношению к скорости реакции при температуре 0° C?

d) Вычислите значения $\left(\dfrac{V_{50}-V_{20}}{V_{20}}\right)\cdot 100\%$ и объясните его смысл.

195. В 2017 году на остров вблизи полуострова Аляски привезли 6 пар медведей, вначале на острове медведей не было. Если популяция медведей изменяется по закону $B_t=B_0\cdot 2^{0,18t}$ (где t – годы), то пользуясь вычислительными средствами, ответьте на следующие вопросы:

a) Что означает число B_0? Чему оно равно?

b) Какую будем иметь популяцию в 2027 году?

c) На сколько процентов увеличится численность медведей в 2037 году по отношению к численности медведей в 2027 году?

196. В результате радиоактивного распада масса радиоактивного вещества изменяется по закону $W(t)=250\cdot(0{,}998)^t$ (г), где t – годы.

a) Какую массу имело вещество вначале?

b) Сколько граммов вещества останется через: **I)** 400; **II)** 800; **III)** 1200 лет?

c) Пользуясь вышеприведенными данными, изобразите график $W(t)$.

d) Пользуясь графиком, оцените, когда останется 125 мг вещества.

197. При охлаждении горячей воды ее температура T изменяется по закону $T(t)=100\cdot2^{-0{,}02t}$ °C, где t – в минутах.

a) Какая была температура вначале?

b) Какая температура будет через: **I**) 15 минут; **II**) 20 минут?

c) Пользуясь вышеприведенными сведениями изобразите график $W(t)$.

d) Пользуясь графиком, оцените, какая будет температура через 78 минут.

198. В электрической цепи сила тока изменяется по закону $I_t=0{,}6\cdot2^{-5t}(A)$, где t – в секундах.

a) Какова была сила тока вначале?

b) Какова будет сила тока через: **I**) 0,1; **II**) 0,5; **I I I**) 1 секунду?

c) Пользуясь вышеприведенными сведениями, изобразите график $W(t)$.

199. В море свет изменяется по отношению к глубине d метров по закону $L(d)=L_0\cdot(0{,}9954)^d$ (кандела).

a) Какова освещенность на дне моря?

b) На сколько процентов уменьшается освещенность на глубине в 1000 метров?

200. Популяция 8 бактерий через 2 часа возросла до 100 бактерий. Когда в этих условиях популяция достигнет 500 бактерий?

201. По сведениям компании сотовой связи, число пользователей сотовой связи выражается по формуле $N(t)=100000e^{0{,}09t}$, где t – месяцы. Когда компания начала работу, если в настоящее время число пользователей 3 миллиона?

202. Пища, взятая из микроволновой печи, охлаждается по закону $T(t)=80e^{-0{,}12t}$, где t – в минутах. Если в настоящее время температура комнаты составляет 22°C, то через сколько минут пища охладится до этой температуры?

203. Высота искусственного спутника с течением времени t (в годах) изменяется по закону $H(t)=30000\,e^{-0{,}2\,t}$.

a) Вычислите высоту спутника через 2 года;

b) Если спутник находится на высоте 320 км, то он сгорит в верхних слоях атмосферы. Сколько времени пройдет до этого момента?

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ III

Решите уравнения (**204–205**):

204. a) $x^4-1=0$; b) $5x^4-3x^3-4x^2-3x+5=0$; c) $3x^4-4x^3-7x^2-4x+5=0$.

205. a) $(x-3)(x+14)(x-15)=0$; b) $(4x+11)(3x-5)=0$;
c) $x^4-15x^2-16=0$; d) $x^4+24x^2-25=0$.

Решите уравнения (**206–208**):

206. a) $(2-x)(3x+1)(2x-3)>0$; b) $(3x-2)(x-3)^3(x+1)^3(x+2)^4>0$.

207. a) $x^4+8x^3+12x^2\geq 0$; b) $(16-x^2)(x^2+4)(x^2+x+1)(x^2-x-x)\leq 0$.

208. a) $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+x-1}<0$; b) $\dfrac{3x-2}{2x-3}<3$; c) $\dfrac{7x-4}{x+2}\geq 1$; d) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3}<\dfrac{3}{x+2}$.

209. Решите систему уравнений:

a) $\begin{cases} x^2+y^2=113, \\ xy=56; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2y+xy^2=84, \\ x^3+y^3=91; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+9xy+2y^2=12, \\ 2x^2+3xy-4y^2=1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=2, \\ x^2+xy+y^2=3. \end{cases}$

Решите систему неравенств (**210–211**):

210. a) $\begin{cases} \dfrac{3x+5}{7}+\dfrac{10-3x}{5}>\dfrac{2x+7}{3}-7\dfrac{3}{21}, \\ \dfrac{7x}{3}-\dfrac{11(x+1)}{6}>\dfrac{3x-1}{3}-\dfrac{13-x}{2}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{2x-11}{4}+\dfrac{19-2x}{2}<2x, \\ \dfrac{2x+15}{9}>\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{x}{3}. \end{cases}$

211. a) $\begin{cases} 2x^2+2<5x, \\ x^2\geq x; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2-16\leq 0, \\ -x^2+16\geq 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{(x+2)(x^2-3x+8)}{x^2-9}\leq 0, \\ \dfrac{1-x^2}{x^2+2x-8}\geq 0. \end{cases}$

212. Решите иррациональное уравнение:

a) $\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}$;

b) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+5}=\sqrt{3x}$;

c) $\dfrac{\sqrt{3+2x}}{2x^2-x-1}>0$; d) $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}>-\sqrt{x-5}$.

Сравните числа (**213–215**):

213. a) $4,2^{-\sqrt{2}}$ и 1; b) $0,2^{\frac{3}{5}}$ и $0,2^{-\frac{3}{5}}$; c) $(0,4)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}$ и 1.

214. a) $4^{0,5}$ и $4^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$; b) $\sqrt{3}^{\,0,2}$ и $3^{0,2}$; c) $2^{-\frac{3}{4}}$ и $8^{-\frac{4}{9}}$.

215. a) $2^{-\sqrt{3}}$ и $2^{-\sqrt{5}}$; b) $7^{-0,3}$ и $7^{-\frac{1}{3}}$; c) $(\frac{1}{3})^{\sqrt{5}}$ и $3^{-\sqrt{3}}$.

216. Найдите область определения функции:

a) $y=5^{\sqrt{x^2-1}}$; b) $y=\dfrac{1}{3^x+1}$; c) $y=\dfrac{1}{3^{x^2}-9}$; d) $y=3^{\frac{1}{2-x}}$.

217. Найдите область значений функции:

a) $y=2^{-|x|}$; b) $y=3+4^{x+1}$; c) $y=-6^x$; d) $y=5^{|x|}+1$.

Решите уравнения (**218–219**):

218. a) $8^x=2^{\frac{1}{5}}$; | b) $121^x-7\cdot 11^x=5\cdot 11^x-11$; | c) $0,5^{x^2+x-3,5}=2\sqrt{2}$.

219. a) $6^{2x}-5^{2x-1}=6^{2x-1}+5^{2x}$; | b) $4^{x+3}+4^x=130$; | c) $125^x+20^x=2^{3x+1}$.

220. Решите систему уравнений:

a) $\begin{cases} x+y=5, \\ 5^{y-x^2}=0,2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3^{x-1}=2^y, \\ 0,1^{2x-y}=0,01; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5^{x-y}=25, \\ 3^{x+y}=27. \end{cases}$

221. Решите неравенства:

a) $4^x\le 3^x$; | b) $16^x-7\cdot 4^x-8<0$; | c) $4^x\cdot 5^{1-x}<\dfrac{25}{4}$; | d) $6^{\frac{x-3}{x+8}}\ge 1$.

222. Сравните числа:

a) $\log_3 2$ и 2; b) $\log_3 5$ и $2\cdot\log_3 2$; c) $\log_2 5$ и $\log_5 2$

d) $\log_{0,2} 5$ и $\log_{0,2} 6$; e) $\log_4 3$ и $\log_3 4$; f) $\lg 18,8$ и $\lg 6\pi$.

223. Найдите область определения функции:

a) $y=\log_2(2x+7)$; | b) $y=\log_{\frac{1}{3}}(4-x^2)$; | c) $y=\log_5(-8x)$; | d) $y=\lg\dfrac{x-3}{x+8}$.

Решите уравнения:

224. a) $\lg(x-9)+\lg(2x-1)=2$; b) $\log_2\sqrt{x-3}+\log_2\sqrt{x+3}=2$.

Решите систему неравенств (**225–226**):

225. a) $\begin{cases} 5^{x-y}=1, \\ 2^{\log_2(x+y)}=6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lg x+\lg y=4, \\ \lg x-\lg y=6; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log_{17}(3^x+2^y)=1, \\ 3^{x+1}-4\cdot 2^y=-5; \end{cases}$

226. a) $\begin{cases} 2^x\cdot 5^y=40, \\ 5^x\cdot 2^y=250; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_2 x+5^{\log_5 y}=4, \\ x^y=16; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3^x\cdot 3^y=81, \\ 3^x-3^y=24. \end{cases}$

227. Решите неравенство:

a) $\log_3(x^2+x+1)\ge 1$; b) $\log_2(x^2+x-6)-\log_2(x+3)\le 1$;

c) $\lg^2 x<\lg x^5-6$; d) $\log_3(4^x-5\cdot 2^x+13)>2$; e) $5^{x+7}>2$.

228. Начертите график функции:

a) $y=1{,}5\sin(2x-1)$; b) $y=2\cos(2x-\frac{\pi}{3})$; c) $y=\log_3(1-x)$.

229. Сравните:

a) $\arcsin(-\frac{1}{2})$ и $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\arccos\frac{1}{2}$ и $\mathrm{arctg}(-1)$;

c) $\mathrm{arc\,tg}\sqrt{3}$ и $\mathrm{arctg}1$; d) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ va $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

230. Вычислите:

a) $2\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})+\mathrm{arctg}(-1)+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\mathrm{arctg}(-\sqrt{3})+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin 1$;

Решите уравнения (**231–233**):

231. a) $2\cos^2x+5\sin x-4=0$; b) $3\sin^2 2x+7\cos^2x-3=0$; c) $4\mathrm{tg}^2x-5\mathrm{tg}x+1=0$.

232. a) $3\sin^2x+7\sin x-10=0$; b) $2\cos^2x-5\cos x+3=0$; c) $\sin 6x=\sin 3x$.

233. a) $\cos 7x=\cos 2x$; b) $\mathrm{tg}8x=\mathrm{tg}11x$.

Решите неравенства (**234–235**):

234. a) $\sin x>-\frac{1}{2}$; b) $\cos 2x\le\frac{1}{2}$; c) $\mathrm{tg}3x\ge 1$; d) $\sin 2x\le\frac{1}{2}$.

235. a) $\sin 4x\le\frac{1}{2}$; b) $\cos 10x\ge 0$; c) $\mathrm{tg}9x\le\sqrt{3}$; d) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\le 0$.

Контрольные тестовые задания

1. Решите уравнение $\sin 6x=0$.

A) $x=\frac{\pi}{6}n,\ n\in Z$; B) $x=\frac{\pi}{5}n,\ n\in Z$;

C) $x=\frac{\pi}{4}n,\ n\in Z$; D) $x=\frac{\pi}{3}n,\ n\in Z$.

2. Решите уравнение $\cos 2x = 0$.

A) $x = 2\pi n,\ n \in Z$; B) $x = \pi n,\ n \in Z$;

C) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z$; D) $x = \frac{\pi}{3}n,\ n \in Z$.

3. Решите уравнение $\operatorname{tg} 4x = \sqrt{3}$.

A) $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z$; B) $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z$;

C) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z$; D) $x = \frac{\pi n}{4},\ n \in Z$.

4. Решите неравенство $\sin 2x > 3$.

A) $x = \pi n,\ n \in Z$; | B) $\varnothing$; | C) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$; | D) $x = 2\pi n,\ n \in Z$.

5. Решите неравенство $\cos 2x < 3$.

A) $(-\infty; +\infty)$; B) $\varnothing$; C) $(-\infty; 0)$; D) $(0; +\infty)$.

6. Найдите область определения $y = 12^x$.

A) $(-\infty; +\infty)$; B) $(0; +\infty)$; C) $(-\infty; 0)$; D) $\varnothing$.

7. Найдите область определения $y = \log_2(3 - x)$.

A) $(3; +\infty)$; B) $[3; +\infty)$; C) $(-\infty; 3)$; D) $(-\infty; 3]$.

8. Вычислите $\arcsin \frac{1}{2}$.

A) $\frac{\pi}{2}$; B) π; C) $\frac{\pi}{4}$; D) $\frac{\pi}{6}$.

9. Вычислите $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$.

A) $\frac{\pi}{3}$; B) $\frac{\pi}{2}$; C) $\frac{\pi}{6}$; D) $\frac{\pi}{4}$.

10. Вычислите $\operatorname{arctg} 1$.

A) $\frac{\pi}{3}$; B) $\frac{\pi}{2}$; C) $\frac{\pi}{6}$; D) $\frac{\pi}{4}$.

ГЛАВА IV

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

86-87 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ. ИЗОБРАЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Комплексные числа

Учение о комплексных числах в науке и, в частности, в математике занимает особое место. Быстро развиваясь, эта область имеет чрезвычайно широкое применение в технике, а также во многих отраслях производства. Приведем отдельные сведения об этих числах. Начнем с частного примера.

В процессе решения уравнения $x^2+4=0$ формально получаются "числа" $x_1=2\sqrt{-1}$ и $x_2=-2\sqrt{-1}$. Среди действительных чисел таких "чисел" не существует. Чтобы выйти из такой ситуации, возникает необходимость рассмотрения $\sqrt{-1}$ как нового числа.

Это новое число не выражает никакую реальную величину или ее изменение. Поэтому $\sqrt{-1}$ принято называть ***мнимой*** (воображаемой, в действительности не существующей) единицей и принято специальное обозначение: $\sqrt{-1}=i$. Для мнимой единицы справедливо равенство $i^2=-1$.

Рассмотрим выражения вида $a+bi$. Здесь a и b любые действительные числа, а i мнимая единица.

Так как выражение $a+bi$ состоит из "комплекса" действительного числа a и мнимого числа bi, то принято его называть комплексным числом.

Выражение $a+bi$ называется комплексным числом алгебраического вида.

$a+bi$ назовем для краткости "комплексным числом", вместо названия "комплексное число алгебраического вида". Комплексные числа удобнее обозначить одной буквой. Например, $a+bi$ обозначим через z. Принято обозначать *действительную часть* a комплексного числа $z=a+bi$ через Re(z) (по-французски *rėelle* – действительное), *мнимую часть* b через Im(z) (по-французски *imaginaire* – мнимая): $a=\mathrm{Re}(z)$, $b=\mathrm{Im}(z)$.

В случае, когда $b=0$, комплексное число $z=a+bi$ будет действительным числом $z=a$. Следовательно, множество действительных чисел R является подмножеством **множества всех комплексных чисел С:** $R\subset C$.

Пример 1. Найдите действительные и мнимые части комплексных чисел: $z_1=1+2i$, $z_2=2-i$, $z_3=2{,}1$, $z_4=2i$, $z_5=0$.

△ По определениям действительных и мнимых частей комплексных чисел найдем:

$\mathrm{Re}(z_1)=1$; $\mathrm{Re}(z_2)=2$; $\mathrm{Re}(z_3)=2{,}1$; $\mathrm{Re}(z_4)=0$; $\mathrm{Re}(z_5)=0$;

$\mathrm{Im}(z_1)=2$; $\mathrm{Im}(z_2)=-1$; $\mathrm{Im}(z_3)=0$; $\mathrm{Im}(z_4)=2$; $\mathrm{Im}(z_5)=0$. ▲

Для комплексных чисел отношения “<”, “>” не определены, но вводится понятие равенства комплексных чисел.

Комплексные числа, действительные и мнимые части которых соответственно равны, называются взаимно равными комплексными числами.

Например, для чисел $z_1=1{,}5+\frac{4}{5}i$ и $z_2=\frac{3}{2}+0{,}8i$ имеем $\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)=1{,}5$; $\mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)=0{,}8$. Следовательно, $z_1=z_2$.

Два комплексных числа, отличающиеся друг от друга только знаком мнимых частей, называются взаимно сопряженными числами. Комплексное число, сопряженное с комплексным числом $z=a+bi$, имеет вид $\overline{z}=a-bi$.

Например, $6+7i$ и $6-7i$ сопряженные комплексные числа: $\overline{6+7i}=6-7i$. Также, сопряженное число к числу $\overline{z}$ будет $\overline{\overline{z}}=z$.

Например, $\overline{\overline{6+7i}}=\overline{6-7i}=6+7i$. Сопряженное число к действительному числу a равно самому a: $\overline{a}=\overline{a+0\cdot i}=a-0\cdot i=a$. Но сопряженное число к мнимому числу bi есть число $\overline{bi}=-bi$, так как, $\overline{bi}=\overline{0+bi}=0-bi=-bi$.

Арифметические действия над комплексными числами

Арифметические действия над комплексными числами определяются следующими формулами:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i; \qquad (1)$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i; \qquad (2)$$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i; \qquad (3)$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i. \qquad (4)$$

Непосредственное применение равенств (1) и (2) не представляет трудностей. Умножение комплексных чисел можно выполнить как умножение многочленов (двучленов) от i, при этом учитывая, что $i^2=-1$.

Пример 2. Найдите сумму: $(3+7i)+(-5+4i)$.

△ Для нахождения суммы воспользуемся формулой (1):

$(3+7i)+(-5+4i)=(3+(-5))+(7+4)i=-2+11i$. ▲

Пример 3. Найдите разность: $(13-7i)-(-5+4i)$.

△ Для нахождения разности воспользуемся формулой (2):

$(13-7i)-(-5+4i)=(13-(-5))+(-7-4)i=18-11i$. ▲

Пример 4. Найдите произведение: $(2-i)\cdot(\frac{3}{4}+2i)$.

△ Для нахождения произведения раскроем скобки и используем $i^2=-1$:

$$(2-i)\cdot\left(\frac{3}{4}+2i\right)=2\cdot\frac{3}{4}+2\cdot2i-i\cdot\frac{3}{4}-2i^2=\frac{3}{2}+4i-\frac{3}{4}i+2=\frac{7}{2}+\frac{13}{4}i. ▲$$

Для выполнения деления $\frac{a+bi}{c+di}$ достаточно умножить числитель и знаменатель на *сопряженное* его знаменателю число $c-di$ и выполнить соотвествующие преобразование.

Пример 5. Выполните деление: $\frac{2-i}{-3+2i}$.

△ $$\frac{2-i}{-3+2i}=\frac{(2-i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}=\frac{-6-4i+3i-2}{(-3)^2-(2i)^2}=\frac{-8-i}{13}=\frac{-8}{13}-\frac{1}{13}i. ▲$$

Комплексные числа z, w, удовлетворяющие равенству $z+w=0$, называются *взаимно противоположными числами.* Число, противоположное комплексному числу z, принято обозначать через $-z$. Существует единственное комплексное число, противоположное числу $z=a+bi$ и оно имеет вид $-z=-a-bi$.

Комплексные числа z и w, удовлетворяющие равенству $zw=1$, называются *взаимно обратными комплексными числами.* Не существует числа, обратного числу $z=0$. Для любого комплексного числа $z\neq0$ существует единственное комплексное число, обратное ему. Это число есть $\frac{1}{z}$.

Изображение комплексного числа в плоскости

Допустим, что на плоскости задана прямоугольная декартова система координат. Тогда комплексному числу $z=a+bi$ в плоскости соответствует точка с координатами $(a; b)$.

При этом комплексному числу $a+0i$ соответствует точка $(a; 0)$, а комплексному числу $0+bi$ точка $(0; b)$. Поэтому ось Ox называется действительной осью, а ось Oy мнимой осью (рис.1).

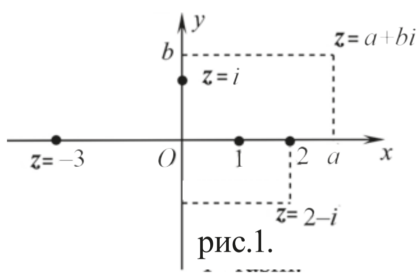


рис.1.

Комплексное число $a+bi$ можно изобразить на плоскости и как вектор с координатами a и b (рис.2). Это позволяет использовать при сложении комплексных чисел правило параллелограмма сложения векторов (рис. 3).

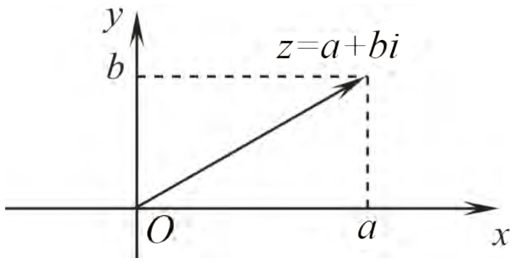


Рис 2.

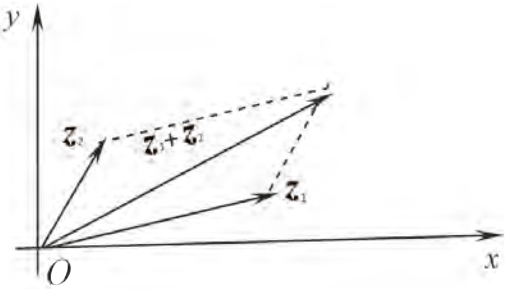


Рис 3.

Вопросы и ответы

1. Что такое мнимая единица? Почему возникла необходимость ее введения?
2. Напишите алгебраический вид комплексного числа. Приведите пример.
3. Какие комплексные числа называются равными? Приведите примеры.
4. Как определяется сумма, разность, произведение и частное двух комплексных чисел? Объясните на примерах.
5. Как определяется комплексное число противоположное данному?
6. Как определяется комплексное число сопряженное данному?
7. Как определяются взаимно обратные комплексные числа? Приведите примеры.
8. Как изображается комплексное число на координатной плоскости? Приведите пример.

Упражнения

1. Назовите устно действительные и мнимые части комплексных чисел:

1) $z=-3+7i$; 2) $z=4-\frac{1}{2}i$; 3) $z=-2-5i$;

4) $z=-5,7+5i$; 5) $z=5i$; 6) $z=9$;

7) $z=-7+3i$; 8) $z=8-\frac{1}{2}i$; 9) $z=-5-6i$;

10) $z=-5,7-5i$; 11) $z=-5i$; 12) $z=90$.

2. Напишите комплексные числа в алгебраическом виде:

1) $\mathrm{Re}(z)=4,\quad \mathrm{Im}(z)=-5$; 2) $\mathrm{Re}(z)=-2,\quad \mathrm{Im}(z)=3$;

3) $\mathrm{Re}(z)=0,\quad \mathrm{Im}(z)=8$; 4) $\mathrm{Re}(z)=7,\quad \mathrm{Im}(z)=0$;

5) $\mathrm{Re}(z)=6,\quad \mathrm{Im}(z)=-7$; 6) $\mathrm{Re}(z)=-3,\quad \mathrm{Im}(z)=4$;

7) $\mathrm{Re}(z)=0,\quad \mathrm{Im}(z)=9$; 8) $\mathrm{Re}(z)=2,\quad \mathrm{Im}(z)=0$;

9) $\mathrm{Re}(z)=12,\quad \mathrm{Im}(z)=20$.

3. Укажите равные комплексные числа (**3–4**):

1) $2-4i$; | 2) $2+3i$; | 3) $\frac{2}{3}+i$; | 4) $\sqrt{121}-7i$; | 5) $33+44i$; | 6) $\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{27}\,i$.

4. 1) $4-3i$; | 2) $1+3i$; | 3) $\frac{1}{3}+i$; | 4) $\sqrt{16}-\sqrt{9}i$; | 5) $3+4i$; | 6) $\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{64}i$.

5. Найдите сопряженное число $\overline{z}$ к числу z (**5–6**):

1) $z=5-3i$; | 2) $z=-5+3i$; | 3) $z=1-i$; | 4) $z=2+3i$; | 5) $z=-7-i$.

6. 1) $z=7{,}2$; | 2) $z=6i$; | 3) $z=\sqrt{16}-\sqrt{9}i$; | 4) $z=-2i+(-7+3i)$.

7. Найдите сумму (**7–8**):

1) $(-5+3i)+(2-i)$; | 2) $(-3)+(3-4i)$; | 3) $(2+5i)+(-2-5i)$; | 4) $(-4i)+(3.6-3i)$.

8. 1) $(8-3i)+(8+3i)$; | 2) $(-7+5i)+(7-5i)$; | 3) $9i+(3-8i)$; | 4) $-17i+(-9+16i)$.

9. Найдите разность (**9–10**):

1) $(3+4i)-(4+2i)$; | 2) $(4-6i)-(3+2i)$; | 3) $(2+4i)-(-4+2i)$.

10. 1) $(5+4i)-(5-4i)$; | 2) $7-(8+5i)$; | 3) $7i-(6i+3)$.

11. Найдите произведение (**11–12**):

1) $(4+6i)(3+4i)$; | 2) $(5+8i)(3-2i)$; | 3) $(6-4i)(3-6i)$.

12. 1) $(-3+2i)(8-4i)$; | 2) $\left(\frac{1}{3}-i\right)\left(\frac{1}{2}+i\right)$; | 3) $\left(\frac{5}{7}+4i\right)\left(\frac{7}{5}-2i\right)$.

13. Найдите частное (**13–14**):

1) $\frac{2+2i}{1-2i}$; | 2) $\frac{4-5i}{3+2i}$; | 3) $\frac{3+4i}{3-4i}$; | 4) $\frac{2+3i}{4-3i}$; | 5) $\frac{4-5i}{3+2i}$.

14. 1) $\frac{4-5i}{-2+3i}$; | 2) $\frac{3}{5-2i}$; | 3) $\frac{5-2i}{3}$; | 4) $\frac{7i}{13-i}$; | 5) $\frac{7+4i}{5-6i}$.

15. Выполните действия (**15–16**):

1) $\frac{(3-4i)(4-3i)}{2+i}$; | 2) $\frac{(4-i)(3+2i)}{3-2i}$; | 3) $\frac{5-2i}{(2+i)(1-i)}$.

16. 1) $\frac{3-2i}{(1+i)(3-i)}$; | 2) $\frac{3}{2-3i}+\frac{3}{2+3i}$; | 3) $\frac{2}{1+i}+\frac{5}{2+i}$.

17. Изобразите комплексные числа в плоскости (**17–18**):

1) $z=3+4i$; | 2) $z=3-4i$; | 3) $z=-3+4i$; | 4) $z=-3-4i$; | 5) $z=2i$.

18. 1) $z=4-2i$; | 2) $z=5+3i$; | 3) $z=\frac{2+i}{2-i}$; | 4) $z=(2-i)(1+i)$; | 5) $z=(2+i)(2-i)$.

88 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА ВИДА $r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и $r \cdot e^{i\varphi}$ $(r>0,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi)$

В этой теме изучим тригонометрическую и показательную формы записи комплексного числа.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат. Допустим, что комплексному числу $z=a+bi$ поставлена в соответствие точка A с координатой $(a; b)$. Соединив начало координат и точку A, получим вектор $\overrightarrow{OA}$ (рис.4).

Расстояние $r=OA$ от точки O до точки A называется ***модулем комплексного числа***, а угол (φ) между положительным направлением оси абсцисс и вектором $\overrightarrow{OA}$ называется ***аргументом комплексного числа***.

Очевидно, что, $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$.

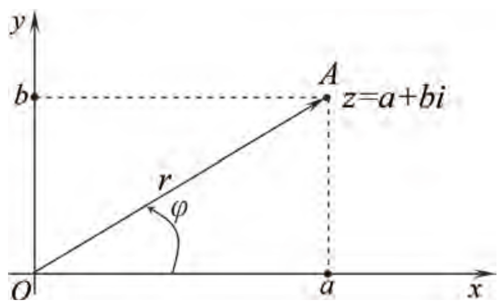


Рис-4.

Запись вида $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется тригонометрической формой записи числа z, а запись $z=r \cdot e^{i\varphi}$ – показательной формой. Для перевода комплексного числа из тригонометрической формы в алгебраическую используются равенства: $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$.

Пример 1. Запишите комплексные числа в тригонометрическом форме:

1) i; 2) $-2i$; 3) $-1-i$.

△ 1) $z = i = 0 + 1 \cdot i$, $a=0$, $b=1$, $r=\sqrt{0^2+1^2}=1$, $\cos\varphi = \dfrac{0}{1} = 0$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Следовательно, $i = 1\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$, т.е. $i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$.

2) Так как $r=2$, $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$, то $-2i = 2\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$;

3) $z=-1-i,\ a=-1,\ b=-1,\ r=\sqrt{2},\ \cos\varphi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \varphi=\dfrac{5\pi}{4}.$

Следовательно, $-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right).$ ▲

Пример 2. Запишите комплексные числа в показательном форме:

1) i; 2) $-2i$; 3) $-1-i$.

△ Воспользуемся расчетами примера 1:

$$i=e^{\frac{\pi}{2}i},\qquad -2i=2e^{\frac{3\pi}{2}i},\qquad -1-i=\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}.$$ ▲

Вопросы и задание

1. Что такое модуль комплексного числа? Как он находится?
2. Что такое аргумент комплексного числа? Приведите пример.
3. Что такое тригонометрическая форма записи комплексного числа. А показательная?
4. Докажите знаменитую формулу Эйлера: $e^{i\pi}=-1$.

Упражнения

Найдите модуль комплексного числа (**19–20**):

19. 1) $z=-2+3i$; 2) $z=-2+3i$; 3) $z=1+\sqrt{3}i$; 4) $z=\sqrt{8}-i$.

20. 1) $z=6-8i$; 2) $z=2+2\sqrt{3}i$; 3) $z=\sqrt{3}+i$; 4) $z=2i$.

Найдите аргумент комплексного числа (**21–22**):

21. 1) $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$; 2) $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$; 3) $z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; 4) $z=2\sqrt{2}i$.

22. 1) $z=5$; 2) $z=-2i$; 3) $z=\dfrac{\sqrt{33}}{2}-\dfrac{\sqrt{11}}{2}i$.

Запишите комплексное число в тригонометрической и показательной формах (**23–24**):

23. 1) $z=-2-2i$; | 2) $z=2-2i$; | 3) $z=\sqrt{3}-i$; | 4) $z=1-\sqrt{3}i$.

24. 1) $z=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$; | 2) $z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; | 3) $z=\dfrac{\sqrt{33}}{2}-\dfrac{\sqrt{11}}{2}i$; | 4) $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

89-90 ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ЧАСТНОЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ, ЗАДАННЫХ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Умножение комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

Для умножения комплексных чисел

$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\ \ z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ справедлива формула:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]. \qquad (1)$$

Для деления комплексных чисел z_1 и z_2 в тригонометрической форме справедлива формула $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{r_2}{r_1}\left[\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\right]$, $r_1 \neq 0$. (2)

Пример 1. Умножьте комплексные числа

$z_1 = 3(\cos 20° + i\sin 20°)$ и $z_2 = 2(\cos 35° + i\sin 35°)$.

△ По вышеприведенному правилу найдем произведение:

$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 2(\cos(20° + 35°) + i\sin(20° + 35°)) = 6(\cos 55° + i\sin 55°)$. ▲

Пример 2. Умножьте комплексные числа

$z_1 = 2(\cos 140° + i\sin 140°)$, $z_2 = 3(\cos 150° + i\sin 150°)$

и $z_3 = 5(\cos 70° + i\sin 70°)$.

△ По вышеприведенной формуле найдем произведение:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5\left[\cos(140° + 150° + 70°) + i\sin(140° + 150° + 70°)\right] =$$

$$= 30(\cos 360° + i\sin 360°) = 30. ▲$$

Пример 3. Найдите частное комплексных чисел

$z_1 = 6(\cos 50° + i\sin 50°)$ и $z_2 = 2(\cos 25° + i\sin 25°)$.

△ По правилу деления:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{2}\left[\cos(50° - 25°) + i\sin(50° - 25°)\right] = 3(\cos 25° + i\sin 25°). ▲$$

Возведение в натуральную степень

Для возведения в квадрат комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ используем формулу умножения комплексных чисел (1):

$z^2 = r^2(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$. Точно так же,

$$z^3 = \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^3 = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi). \qquad (3)$$

Отметим, что в общем случае справедлива формула

$z^n = \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, где $n \in N$.

Пример 4. Возведите комплексное число в куб $z = 3(\cos 15° + i\sin 15°)$.

△ По формуле (3):

$$z^3 = 27(\cos 45° + i\sin 45°) = \frac{27}{2}\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) = \frac{27}{\sqrt{2}}(1 + i). ▲$$

Пример 5. Найдите десятую степень комплексного числа $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

△ Сначала найдем модуль и аргумент заданного числа, запишем его в тригонометрической форме: $r = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3} = 60°$, $z = 1 \cdot (\cos 60° + i\sin 60°)$ отсюда:

$$z^{10} = \left(\cos 600° + i\sin 600°\right) = \cos 240° + i\sin 240° = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Вопросы и задания

1. Как умножаются комплексные числа, заданные в тригонометрической форме?
2. Как делятся комплексные числа, заданные в тригонометрической форме?
3. Как возводятся в степень комплексные числа заданные в тригонометрической форме?

Упражнения

Умножьте комплексные числа (**27–28**):

27. 1) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ и $z_2 = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$;

2) $z_1 = \frac{1}{3}(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9})$ и $z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.

28. 1) $z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$ и $z_2 = \sqrt{3}(\cos\pi + i\sin\pi)$;

2) $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18})$ и $z_2 = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$.

Разделите комплексные числа (**29–30**):

29. 1) $z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})$ на $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$;

2) $z_1 = 8(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ на $z_2 = 4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$.

30. 1) $z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$ на $z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$;

2) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$ на $z_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$.

Возведите комплексное число в степень (**31–32**):

31. 1) $(3(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}))^5$; 2) $(\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}))^6$; 3) $(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}))^7$.

32. 1) $(4(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}))^4$; 2) $(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15})^{10}$; 3) $(\cos\frac{\pi}{22} + i\sin\frac{\pi}{22})^{11}$.

Выполните действия (**33–34**):

33. 1) $\dfrac{(1+i)^5\left(\sqrt{2}-i\right)^4}{(1-i)\left(1+\sqrt{2}\,i\right)^4}$; 2) $\dfrac{(1-i)^4\left(\sqrt{2}+i\right)^3}{(1+i)^4}$; 3) $\dfrac{(1+i)^{15}}{(1-i)^{10}-(1+i)^{10}\cdot i}$.

34. 1) $\dfrac{2+5i}{2-5i}+\dfrac{2-5i}{2+5i}$; 2) $\dfrac{12+5i}{6-8i}+\dfrac{(2-i)^2}{1-2i}$; 3) $\dfrac{3-4i}{3+4i}+\dfrac{5+6i}{5-6i}$.

91 ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ИЗ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Для извлечения квадратного корня из комплексного числа вида $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ обозначим модуль и аргумент искомого комплексного числа через x и y и запишем следующее равенство:

$$\sqrt{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=x(\cos y+i\sin y).$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат, $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=x^2(\cos 2y+i\sin 2y)$ и учитывая, что $x^2=r$, $2y=\varphi+2\pi n$, найдем отношение $x=\sqrt{r}$, $y=\dfrac{\varphi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. Следовательно, для искомого квадратного корня комплексного числа z справедлива формула:

$\beta=\sqrt{r}\left[\cos\dfrac{\varphi+2\pi n}{2}+i\sin\dfrac{\varphi+2\pi n}{2}\right]$. Подставляя вместо n значения 0, ±1, ±2, … находим различные корни. В результате проверки определим, что существуют только два различных значения, т.е.

при $n=0$ $\quad\beta_1=\sqrt{r}\left(\cos\dfrac{\varphi}{2}+i\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)$, (1)

при $n=1$ $\quad\beta_2=\sqrt{r}\left[\cos\left(\dfrac{\varphi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}+\pi\right)\right]$. (2)

Пример 1. Извлеките квадратный корень из комплексного числа $z=9(\cos 60°+i\sin 60°)$.

△ По вышеприведенной формуле вычислим квадратный корень:

$$\sqrt{z}=3\left[\cos(30°+180°n)+i\sin(30°+180°n)\right].$$

По этой формуле находятся следующие квадратные корни:

при $n=0$ $\quad\sqrt{z}=3(\cos 30°+i\sin 30°)=\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$

и при $n=1$ $\quad\sqrt{z}=3(\cos 210°+i\sin 210°)=-\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$. ▲

Для извлечения кубического корня используется следующая формула:

$$z_n=\sqrt[3]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=x(\cos y+i\sin y)=\sqrt[3]{r}(\cos\frac{\varphi+360°n}{3}+i\sin\frac{\varphi+360°n}{3}),$$

$n=0,\ 1,\ 2.$

Эти найденные числа являются вершинами правильного треугольника, вписанного в окружность с центром в начале координат и с радиусом $\sqrt[3]{r}$ в Декартовой системе координат

Пример 2. Найдите кубический корень комплексного числа $z=1$ и укажите на чертеже.

△ Так как модуль этого числа $r=1$ и аргумент $\varphi=0°$, то

$$z_n=\sqrt[3]{1}=1\cdot\left(\cos\frac{0°+360°n}{3}+i\sin\frac{0°+360°n}{3}\right),\ n=0,\ 1,\ 2.$$

Отсюда, при $n=0$ $z_0=1\cdot(\cos0°+i\sin0°)=1,$

При $n=1$ $z_1=1\cdot(\cos120°+i\sin120°)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$

При $n=2$ $z_2=1\cdot(\cos240°+i\sin240°)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$

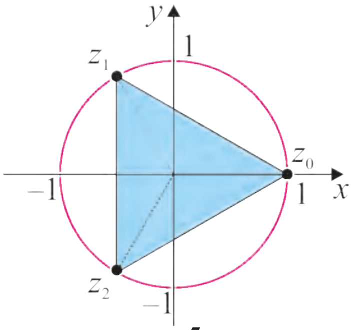


рис.5.

Можно увидеть, что эти числа представляют вершины правильного треугольника.

При извлечении корня четвертой степени из комплексного числа используется следующая формула:

$$z_n=\sqrt[4]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[4]{r}\left(\cos\frac{\varphi+360°n}{4}+i\sin\frac{\varphi+360°n}{4}\right),\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Пример 3. Извлеките корень четвертой степени из комплексного числа $z=i$.

△ Так как модуль и аргумент этого числа $r=1$ и $\varphi=90°$, то,

$$z_n=\sqrt[4]{1(\cos90°+i\sin90°)}=1\cdot\left(\cos\frac{90°+360°n}{4}+\sin\frac{90°+360°n}{4}\right).$$

Отсюда при: $n=0$ имеем $z_0=\cos22{,}5°+i\sin 22{,}5°$,

При $n=1$ имеем $z_1=\cos 112{,}5°+i\sin 112{,}5°$,

При $n=2$ имеем $z_2=\cos 202{,}5°+i\sin 202{,}5°$,

При $n=3$ имеем $z_3=\cos 292{,}5°+i\sin 292{,}5°$.

Эти числа являются вершинами квадрата, вписанного в окружность с центром в начале координат и радиусом 1 (рис.6).

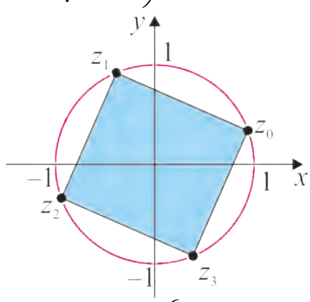


рис.6.

Вопросы и задания

По какой формуле извлекается квадратный корень из комплексного числа?

Упражнения

Извлеките квадратный корень из комплексного числа (**35–36**):

35. 1) $z = 25\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $z = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\cdot\sin\frac{\pi}{18}\right)$;

3) $z = \cos\frac{\pi}{5} + i\cdot\sin\frac{\pi}{5}$; 4) $z = \cos\frac{3\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{4}$;

5) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{30} + i\cdot\sin\frac{\pi}{30}\right)$; 6) $z = \frac{1}{49}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)$;

7) $z = \cos\frac{\pi}{10} + i\cdot\sin\frac{\pi}{10}$; 8) $z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{2}$;

36. 1) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $z = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)$;

3) $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}$; 4) $z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{2}$;

5) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 6) $z = \frac{16}{9}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)$;

7) $z = 5(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4})$; 8) $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}$.

УПРАЖНЕНИЕ К ГЛАВЕ IV

37. Вычислите:

1) $(3+4i)(2-5i)+(3-4i)(2+5i)$; 2) $(1+3i)^3-\left(4+i^5\right)$;

3) $\frac{(1-2i)^2}{1+3i}$; 4) $5-7i+8i^2-9i^3+i^4$.

38. Выполните действия:

1) $z = \left(\frac{1-\sqrt{3}\,i}{3i}\right)^2$; 2) $z = \frac{12-13i}{8+6i} + \frac{(1+2i)^2}{i+3}$; 3) $\frac{4i}{(\sqrt{3}-i)^2}$.

Вычислите (**39–42**):

39. 1) $(1+i)^{10}$; 2) $(1-i)^4\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^3$; 3) $(1+i)^{2018}\cdot(1-i)^{2018}$;

4) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^8$; | 5) $\dfrac{2\sqrt{3}-2i}{(-1+i)\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i\right)}$; | 6) $\left(\dfrac{\sqrt{2}-i}{1+i}\right)^{10}$.

40. 1) $z=\dfrac{(2+i)^2}{3-4i}$; | 2) $z=\dfrac{(1+2i)^3}{2i}-3i^{10}$; | 3) $z=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^5$;

4) $z=\dfrac{3+2i}{1+4i}-i^7$; | 5) $\dfrac{(4-i)}{3+4i}$; | 6) $\dfrac{2-3i}{1-4i}$.

41. 1) $\dfrac{2+5i}{2-5i}+\dfrac{2-5i}{2+5i}$; | 2) $\dfrac{12+5i}{6-8i}+\dfrac{(2-i)^2}{1-2i}$;

3) $(2-3i)^3-(2+3i)^3$; | 4) $\dfrac{(4+3i)(2+3i)^2}{6+8i}$;

5) $\dfrac{33+5i}{2-5i}+\dfrac{2-5i}{2+5i}$; | 6) $\dfrac{12-5i}{6-8i}+\dfrac{(2+i)^2}{1-2i}$.

42. 1) $(2-2i)\cdot 2\sqrt{3}\left(\cos 70^\circ+i\sin 70^\circ\right)$; | 2) $\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)\cdot\left(\sqrt{3}-3i\right)$.

43. Выполните действия:

1) $5\left(\cos 100^\circ+i\sin 100^\circ\right):\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$; | 2) $(6+6i):3\left(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ\right)$.

44. Возведите в степень:

1) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^3$; | 2) $\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)^4$; | 3) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}i\right)^6$;

4) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^5$; | 5) $\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)^{10}$; | 6) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}i\right)^{10}$.

45. Вычислите квадратный корень:

1) $\sqrt{-27i}$; 2) $\sqrt{6-6\sqrt{3}\,i}$; | 3) $\sqrt{8+8\sqrt{3}\,i}$; | 4) $\sqrt{-256}$.

46. Проверьте равенство:

1) $\left[\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}\right]^5+\left[\dfrac{-\sqrt{3}-i}{2}\right]^5=\sqrt{3}$;

2) $\dfrac{(\sin 26^\circ+i\cos 154^\circ)\cdot(\sin 27^\circ+i\cos 153^\circ)^3}{\sin 17^\circ-i\cos 17^\circ}=-1$.

47. Вычислите кубический корень:

1) $\sqrt[3]{1+i}$; | 2) $\sqrt[3]{-i}$; | 3) $\sqrt[3]{8}$; | 4) $\sqrt[3]{1-i}$; | 5) $\sqrt[3]{-8}$.

48. Извлеките корень в четвертой степени

1) $\sqrt[4]{-1}$; | 2) $\sqrt[4]{16}$; | 3) $\sqrt[4]{1+i}$; | 4) $\sqrt[4]{1-i}$; | 5) $\sqrt[4]{-16}$.

Образцы контрольной работы

1. Вычислите: $(35-7i)\cdot(4-6i)$.
2. Выполните деление: $\dfrac{8-i}{40+3i}$.
3. Умножьте: $3(\cos 5°+i\sin 5°)\cdot 8(\cos 3°+i\sin 3°)$.
4. Возведите в степень: $(3(\cos 4°+i\sin 4°))^6$.
5. Извлеките квадратный корень: $\sqrt{64i}$.

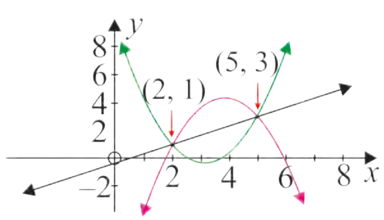
ОТВЕТЫ

Глава III

73. a) Является функцией, так как все абсциссы разные; b) не является функцией, так как, в двух точках абсциссы x - одинаковые; c) не является функцией, так как абсциссы x всех точек одинаковые; d) является функцией, так как все абсциссы x разные; e) является функцией, так как все абсциссы x разные; f) Так как абсциссы x всех точек одинаковые, то не является функцией: **74**. a) Функция; b) функция; c) функция; d) не является функцией; e) функция; f) не является функцией; g) функция; h) не является функцией. **75**. Нет, любая вертикальная прямая не является функцией x.

. **76.** Нет, $y=\pm\sqrt{9-x^2}$. **77.** a) 2; b) 8; c) –1; d) –13; e) 1. **78.** a) 2; b) 2; c) –16; d) –68; e) $\dfrac{32}{9}$ **79.** a) –3; b) 3; c) 3; d) –3; e) $\dfrac{15}{2}$. **80.** a) $7–3a$; b) $7+3a$; c) $–3a–2$; d) $10–3b$; e) $1–3x$; f) $7–3x–3h$. **81.** a) $2x^2+19x+43$; b) $2x^2–11x+13$; c) $2x^2–3x–1$; d) $2x^4+3x2–1$; e) $2x^4–x^2–2$; f) $2x^2+4hx+2h^2+3x+3h–1$. **82.** a) **I)** $-\dfrac{7}{2}$; **II)** $-\dfrac{3}{4}$; **III)** $-\dfrac{4}{9}$; b) $x=4$. **84.** $V(4)=6210$. Это цена устройства через 4 года; $t=4{,}5$ – через 4,5 года цена устройства будет 5780; Первоначальная цена устройства равна 9650.

85.

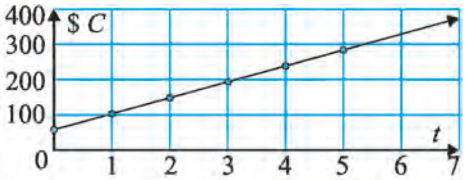


86. $f(x)=–2x+5$. **87.** $a=3$, $b=–2$. **88.** $a=3$, $b=–1$, $c=–4$. **90.** a) **I)** $x>0$; b) **II)** $–2\le x\le 3$; c) **I)** $–2<x\le 0$; **II)** $0\le x<2$; d) **I)** $x\le 2$; **II)** $x\ge 2$; e) **II)** $x\in\mathbb{R}$; f) **I)** $x\in\mathbb{R}$; g) **I)** $1\le x\le 5$; **II)** $x\le 1$, $x\ge 5$; h) **I)** $2\le x<4$, $x>4$; **II)** $x<0$, $0<x\le 2$; i) **I)** $x\le 0$, $2\le x\le 6$; **II)** $0\le x\le 2$, $x\ge 6$. **92.** a) $V(0)=25000$ евро. Это первоначальная стоимость автомашины;

b) $V(3)=16\,000$. Это стоимость автомашины через 3 года; c) $t=5$.

93. a)

t	0	1	2	3	4	5
C	60	105	150	195	240	285



b) $C=60+45t$; c) $ 352,50.

94. a)

t	0	1	2	3	4	5
V	265	254	243	232	221	210

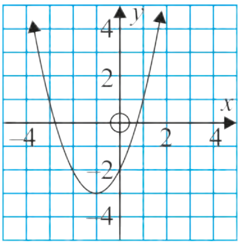
b) 

c) $V(t) = 265–11t$; d) **I)** 100 *l*.

95. a) Да; b) нет; c) да; d) да; e) да; f) нет. **96.** a) Нет; b) да; c) да; d) да; e) нет; f) нет.
97. a) $x=-3$; b) $x=-2$ или -3; c) $x=1$ или 4; d) Не имеет действительного решения.
98. a) **I)** 75 м; **II)** 195 м; **III)** 275 м; b) **I)** $t=2$ сек или t=14 сек; **II)** $t=0$ сек или $t=16$ с.
99. a) 40 тысяч, 480 тысяч; b) 10 штук, или 62 штуки.

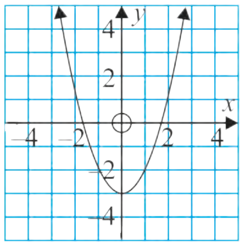
100. a)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	1	–2	–3	–2	1	6	13



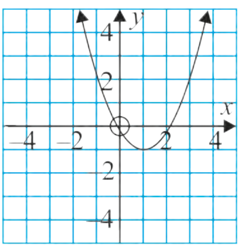
b)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	6	1	–2	–3	–2	1	6



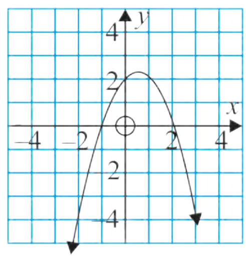
c)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	15	8	3	0	–1	0	3



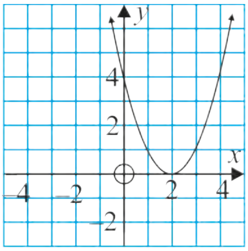
d)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–10	–4	0	2	2	0	–4



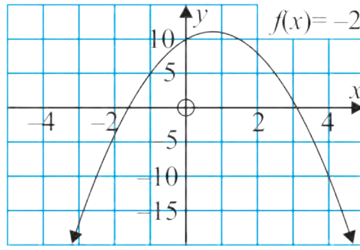
e)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	25	16	9	4	1	0	1



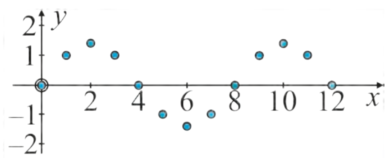
f)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–17	–4	5	10	11	8	1

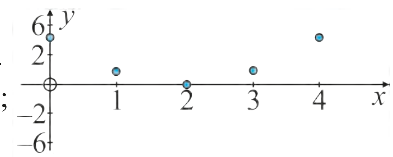


101. a) 3; b) –1; c) –4; d) 1; e) 5; f) 0; g) 8; h) –5; i) 2. **102.** a) 3; b) –6; c) 49; d) 15; e) 0; f) 20. **105.** a) x=3; b) x=–5/2; c) x=1; d) x=–4; e) x=3; f) x=–4. **106.** a) x=4; b) x=–2; c) x=1; d) x=11/2; e) x=5; f) x=–2. **107.** a) x=–3; b) x=4; c) x=–5/4; d) x=3/2; e) x=0; f) x=7/10; g) x=3; h) x=5/3; i) x=–4. **108.** a) (2, 3); b) (–1, 4); c) (3, 8); d) (0, 3); e) (–3, –18); f) (1, –1); g) (1/2, –5/4); h) (3/4, –7/8); i) (6, 7). **109.** a) $y=2(x-1)(x-2)$; b) $y=2(x-2)^2$; c) $y=(x-1)(x-3)$; d) $y=-(x-3)(x+1)$; e) $y=-3(x-1)^2$; f) $y=-2(x+2)(x-3)$. **110.** a) $y=3/2(x-2)(x-4)$; b) $y=-1/2(x+4)(x-2)$; c) $y=-4/3(x+3)^2$; d) $y=1/4(x+3)(x-5)$; e) $y=-(x+3)(x-3)$; f) $y=4(x-1)(x-3)$. **111.** a) 3м; b) 0,5 сек; c) 4 м.

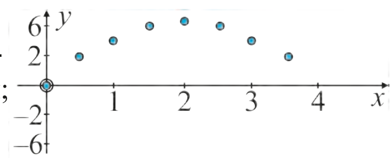
113. a) периодический;



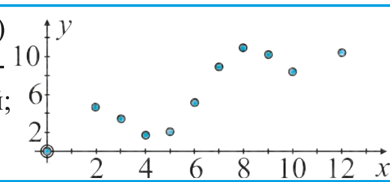
b) не периодический;



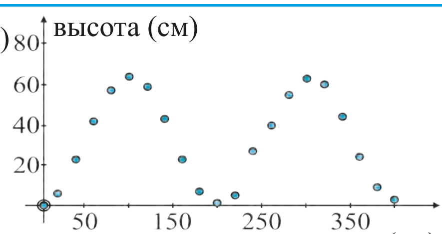
c) не периодический;



d) не периодический;



114. a)

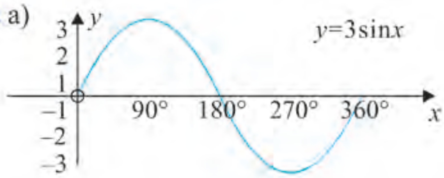


b) Уравнение оси, максимум, период, амплитуды соответственно равны: y=32; 64 см; 200 см; 32 см.

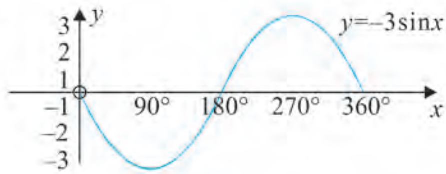
115. a) периодический; b) периодический; c) периодический; d) не периодический; e) периодический; f) периодический.

116. a) 2; b) 8; c) (2,1); d) 8; e) y=–1.

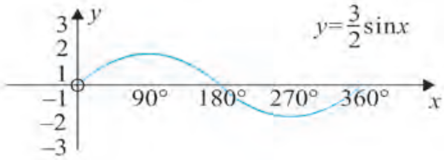
117. a)



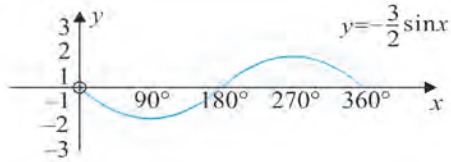
b)



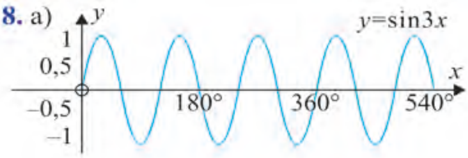
c)



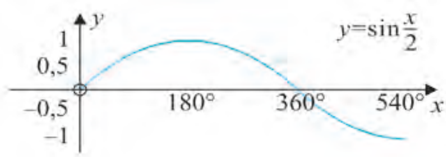
d)



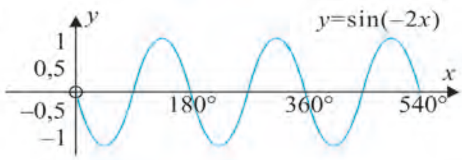
118. a)



b)

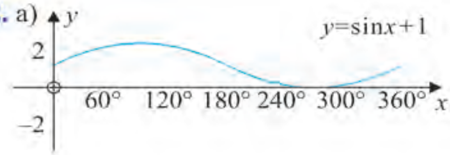


c)

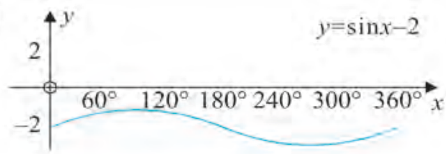


119. a) 90°; b) 90°; c) 1080°; d) 600°;
120. a) b=2/5; b) b=3; c) b=1/6.
121. a) y=3sin$x$; b) y=sin$x$–2; c) y=–2sin$x$–1; d) y=sin2x; e) y=–4sin(x/2); f) y=sin(x/2); g) y=2sin3x; h) y=2sin2x–3.

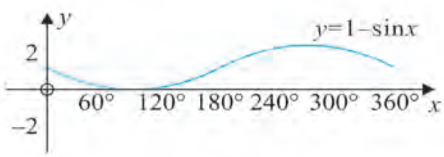
122. a)



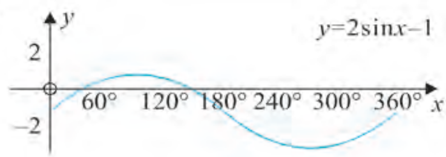
b)



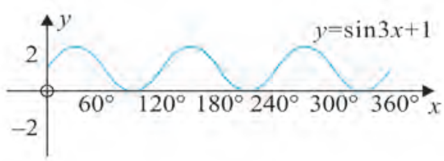
c)



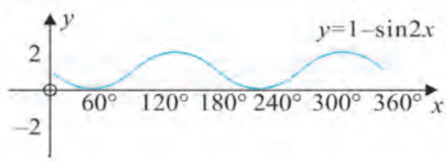
d)



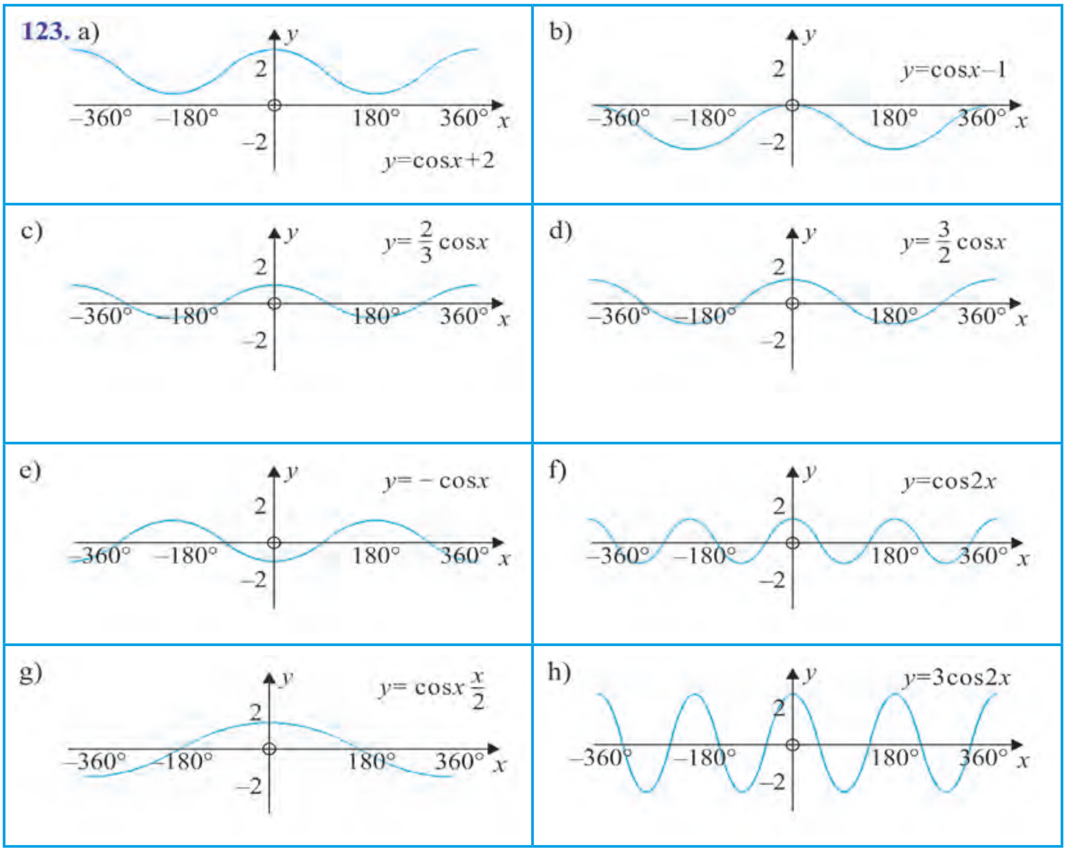
e)



f)



123.



124. a) 120°; b) 1080°; c) 720°. **126.** a) $y=2\cos 2x$; b) $y=\cos(x/2)+2$; c) $y=-5x\cos 2x$. **127.** $T=9{,}5\cos(30t)-9{,}5$. **130.** 1) 0; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$. **131.** 1) $-\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $-\frac{\pi}{2}$. **132.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{5\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) π. **136.** 1) 0; 2) $\frac{4\pi}{3}$. **138.** 1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) $-\pi$. **140.** 1) 2π; 2) $\frac{3\pi}{2}$. **142.** 1) имеет смысл; 2) не имеет смысла; 3) не имеет смысла.

144. 1) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in Z.$

146. 1) $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2n\pi,\ n\in Z.$

148. 1) $x=-\frac{\pi}{3}+n\pi,\ n\in Z.$

150. 1) $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi,\ n\in Z.$

151. 1) $x=(-1)^{n}\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z.$

152. 2) $x=-\frac{\pi}{24}+\frac{n\pi}{4},\ n\in Z.$

153. 1) $x_1=k\pi,\ x_2=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z.$

156. 1) $x_1=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+n\pi,\ x_2=-\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2},\ n\in Z.$

157. 1) $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, \ n \in Z.$

158. 2) $x = \pm\arccos(1 - \frac{\sqrt{7}}{2}) + 2n\pi, \ n \in Z.$ **159.** 2) $x_1 = -\frac{\pi}{4} + n\pi,$ $x_2 = \arccos 4 + n\pi, \ n \in Z.$ **160.** 1) $x = \frac{2n\pi}{3}, \ n \in Z;$ 3) $x_1 = \frac{n\pi}{2},$ $x_2 = \frac{\pi}{10} + \frac{n\pi}{5}, \ n \in Z.$ **162.** 1) $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right);$ 2) $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right);$ 3) $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right).$

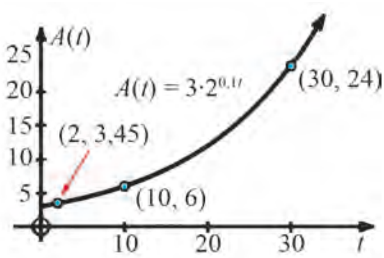
163. 1) $\left[\frac{\pi}{4} + 2n\pi; \frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right], \ n \in Z;$ 2) $\left(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi; \frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right), \ n \in Z;$ 3) $\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi; -\frac{\pi}{4} + n\pi\right), \ n \in Z.$ **167.** 1) $\left[-\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{3} + n\pi\right], \ n \in Z.$ **173.** 1) $y=2x+6.$

174. 1) $y = 13 \cdot \sqrt{\frac{x-1}{17}}.$ **175.** 1) $x^2+y^2=49$, окружность. **176.** 1) $(x-3)^2+(y-7)^2=36$, окружность.

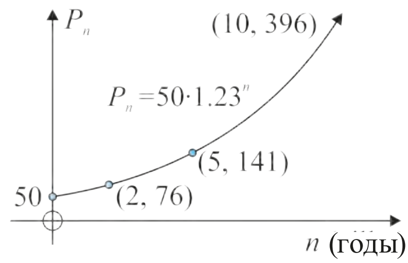
177. 1) 3; 2) 1; 3) 4; 4) 4. **178.** 1) больше; 2) меньше. **180.** 1) область определения: $(-\infty;+\infty)$, область значений: $(0; +\infty)$, $(-\infty; +\infty)$. **181.** 1) возрастает; 2) убывает; 3) возрастает. **183.** 1) $(-\infty; 1]$; 2) $\left(-\infty; \frac{4}{9}\right)$; 7) $[1; +\infty]$; 12) $\left(-\infty; -2-\sqrt{34}\right) \cup \left(-2+\sqrt{34}; +\infty\right)$. **184.** 1) $(-\infty; 2]$. **185.** 1) 3; 2) –2; 3) –2; 4) –3; 5) –3. **186.** 1) больше; 2) больше; 3) меньше. **187.** 1) 2; 2) 5; 3) 125; 4) 45; 5) $\frac{1}{36}$; 9) –2. **188.** 1) $(2{,}5;+\infty)$; 2) $(-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$; 3) $(-2;2)$.

190. 1) $\frac{1}{32}$; 2) 1; 3) 4; 4) 2; 8) –2; 10) 0,5 и 1; 15) $\frac{1}{7}$ и 49. **191.** 1) $(64;+\infty)$; 2) $\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (27;+\infty)$; 7) $(2;5)$.

192. a) 3 м^2;
b) **I)** 3,45 м^2; **II)** 6 м^2; **III)** 24 м^2;
c)

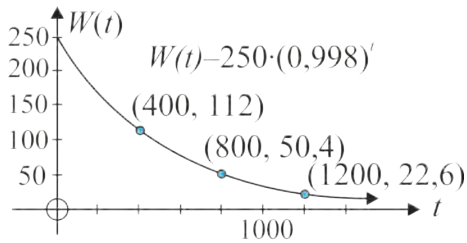


193. a) 50;
b) **I)** 76; **II)** 141; **III)** 396;
c)



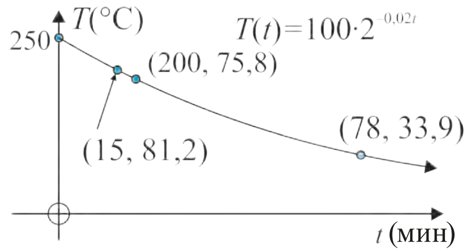
194. a) V_0; b) $2V_0$; c) на 100%; d) на 183 процента.

195. a) 250 г;
b) **I)** 112 г; **II)** 50,4 г; **III)** 22,6 г;
c)

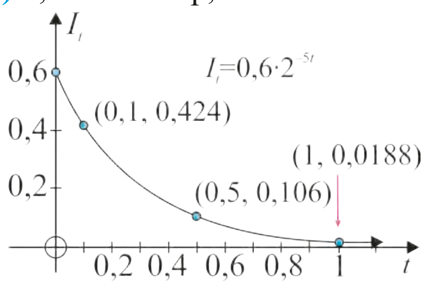


d) ≈346.

197. a) 100°C;
b) **I)** 81,2°C; **II)** 75,8°C; **III)** 33,9°C;
c)



198. a) 0,6 ампер;
b) **I)** 0,424 ампер; **II)** 0,106 ампер;
III) 0,0188 ампер;
c)



199. a) L_0; b) 99%. **200.** Приблизительно 3 часа 15 мин. **201.** 37,8 месяцев.
202. 10,8 минут.
203. 22,7 лет. **204.** b) 1.
205. a) {–14; 3; 15}; c) {–4;4}.
206. a) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{3}{2};2\right)$.
207. a) (–∞;–6]∪[–2; +∞).
208. a) $\left(-2;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$;
c) (–∞;–2)∪[1;+∞).

209. a) {(7;8);(8;7);(–7;–8);+8;–7)}. **212.** a) 3; b) 2. **213.** a) меньше; b) меньше. **216.** a) (–∞;–1]∪[1;+∞); b) (–∞;+∞). **217.** a) (0;1]; b) (3;+∞); c) (–∞; 0). **218.** a) $\frac{1}{15}$; b) 0 и 1; c) 1 и –2. **219.** c) 0. **220.** a){(2;3);(–3;8)}. **221.** a) (–∞;0]; b) (–∞;1,5). **222.** a) меньше; b) больше. **223.** a) (–3,5; +∞); b) (–2;2).
224. a) $2\sqrt{5}$. **225.** b) (100000;0,1). **226.** a) (3;1). **227.** a) (–∞;–2]∪[1;+∞).
229. a) меньше; b) больше. **230.** a) $-\frac{2\pi}{3}$ **231.** c) $x_1=\frac{\pi}{4}+n\pi,\ x_2=\arccos\frac{1}{4}+n\pi,\ n\in Z$.
234. a) $\left(-\frac{\pi}{6}+2n\pi;\frac{7\pi}{6}+2n\pi\right),\ n\in Z$. **235.** c) $\left(-\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{9};\frac{\pi}{27}+\frac{n\pi}{9}\right),\ n\in Z$.

Глава IV

1. 7) Re(z)=–7, Im(z)=3; 8) Re(z)=8, Im(z)=5; 9) Re(z)=–0,5, Im(z)=–6;
10) Re(z)=–5,7, Im(z)=–5; 11) Re(z)=0, Im(z)=–5; 12) Re(z)=90, Im(z)=0.

6. 1) $\bar{z}=7{,}2$; 3) $\bar{z}=4+3i$. **8.** 1) 16; 3) $3+i$. **10.** 1) $8i$; 2) $-1-5i$; 3) $-3+i$. **12.** 2) $1\frac{1}{6}-\frac{1}{6}i$.

14. 1) $-\frac{23}{13}-\frac{2}{13}i$; 3) $\frac{5}{3}-\frac{2}{3}i$. **16.** 2) $\frac{12}{13}$. **20.** 1) 10; 2) 4; 3) 2; 4) 2. **22.** 1) 0; 2) $\frac{3\pi}{2}$; 3) $\frac{11\pi}{6}$. **24.** 1) $2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ va $2\cdot e^{\frac{7\pi i}{4}}$.

28. 1) $z_1\cdot z_2=\cos\frac{13\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{13\pi}{12}$. **30.** 1) $\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}$. **32.** 2) $\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}$.

34. 1) $-\frac{42}{29}$; 2) $-18i$. **36.** 1) $z_0=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6})$, $z_1=\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{6})$.

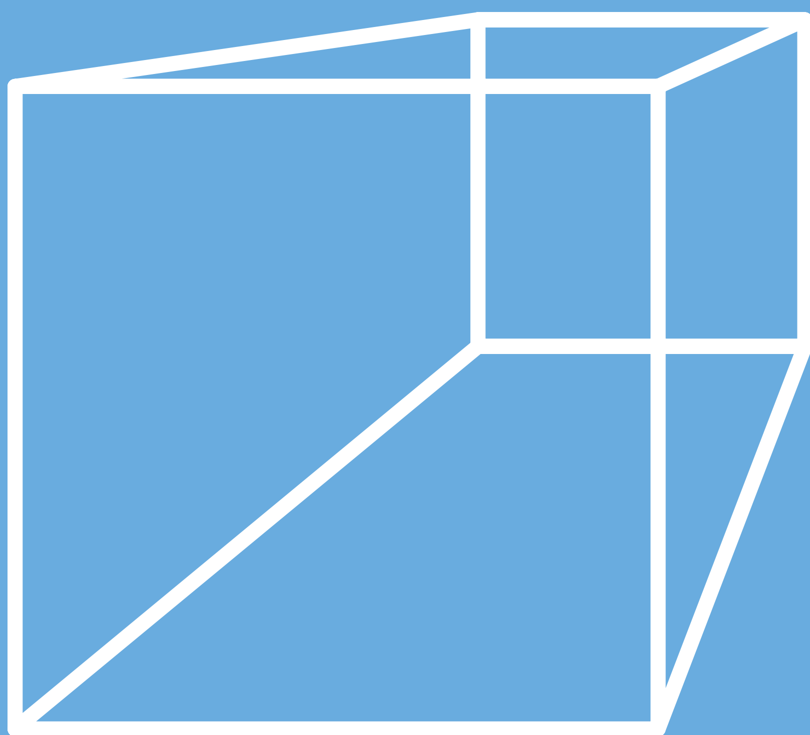
Использованная и рекомендуемая литература

1. *Sh. A. Alimov, O.R. Xolmuhamedov, M.A. Mirzaahmedov.* Algebra va analiz asoslari. 10- sinf uchun darslik. Toshkent: “O‘qituvchi”, 2004.
2. *Mal Coad and others.* Mathematics for the international students. Mathematical Studies SL 2nd edition. Haese and Harris publications. 2010.
3. *Э. Сайдаматов и др.* Алгебра и основы математического анализа.
часть 1, Ташкент: “O‘qituvchi”, 2016.
4. *A.U. Abduhamidov va boshqalar.* Algebra va matematik analiz asoslari, 1- qism, Toshkent: “O‘qituvchi”, 2012.
5. *Н.П. Филичева.* Уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие. Рязань, 2009.
6. *М.И. Исроилов.* Ҳисоблаш методлари. Тошкент: “Ўқитувчи” 1988.
7. *Г.К. Муравин.* Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса. Москва, “Дрофа”, 2006.
8. Алгебра. Учебное пособие для 9–10 классов. Под ред. *Н.Я. Виленкина.* Москва, “Просвещение”, 2004.
9. http://www.ams.org/mathweb/ – Internetda matematika (ingliz tilida).
10. “Математика в школе” jurnali.
11. Fizika, matematika va informatika. Ilmiy-uslubiy jurnal (2001- yildan boshlab chiqa boshlagan).
12. *M. A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov* Matematikadan qiziqarli va olimpiada masalalari. I qism, Toshkent, “Turon-Iqbol”, 2016.
13. Matematikadan qo‘llanma, I va II qismlar. O‘qituvchilar uchun qo‘llanma. Prof. *T.A. Azlarov* tahriri ostida. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1979.
14. *M.A. Mirzaahmedov, D.A. Sotiboldiyev.* O‘quvchilarni matematik olimpiadalarga tayyorlash. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1993.
15. http://www.uzedu.uz – Xalq ta’limi vazirligining axborot ta’lim portali.
16. http://www.eduportal.uz – Multimedia markazi axborot ta’lim portali.
17. http://www.problems.ru – Matematikadan masalalar izlash tizimi (rus tilida).
18. http://matholymp.zn.uz – O‘zbekistonda va dunyoda matematik olimpiadalar.

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

ГЕОМЕТРИЯ



10-класс

В 10-классе начинается системное изучение стереометрии – раздела геометрии о пространственных фигурах. В учебнике описаны основные пронстранственные фигуры, многогранники, тела вращения и их основные свойства, параллельные и перпендикулярные прямые и плоскости, а также их свойства.

Теоретический материал в учебнике "Геометрия-10" изложен в простой и понятной форме. Все темы и понятия раскрыты при помощи различных жизненных ситуаций. После каждой темы приведены вопросы, примеры на доказательство, вычисление и построение, которые помогают учащимся мыслить творчески и закрепить полученные знания.

Учебник "Геометрия-10" предназначен для учащихся 10-класса общеобразовательной школы. Также им можно пользоваться для самостоятельного изучения и повторения геометрии.

СОДЕРЖАНИЕ

Значки, использованные в разделе "Геометрия" и их расшифровка:

– описание теоремы

– описание аксиомы

– вопросы по теме

– активизирующие задания

– окончание доказательства теоремы

– практическое задание

– исторические сведения

– геометрические головоломки

РАЗДЕЛ IV

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

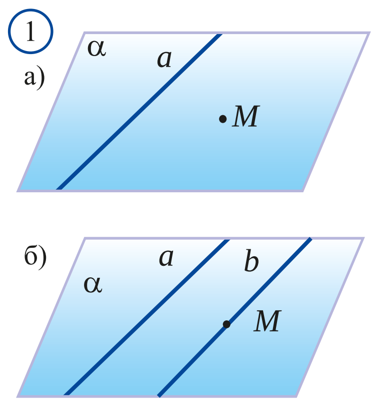
10 ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Две прямые a и b в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Параллельность прямых a и b обозначается так: $a||b$.

В плоскости через заданную точку можно провести единственную прямую, параллельную заданной прямой. Такое свойство справедливо и в пространстве.

Теорема 4.1. В пространстве через любую точку, не лежащую на данной прямой, можно провести единственную прямую, параллельную этой прямой.

Доказательство. Пусть a – заданная прямая и M – точка, не лежащая на этой прямой (рис.1а). По доказанной теореме 2.1- через заданную прямую a и не лежащую на ней точку M можно провести единственную плоскость.



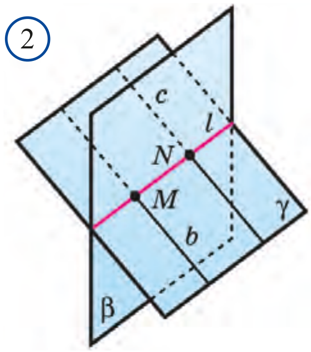
А в плоскости α через точку M можно провести единственную прямую b, параллельную заданной прямой a (рис.1б).

И эта прямая есть единственная искомая прямая b. ❑

Если одна из двух параллельных прямых, лежащих в плоскости, пересекает третью прямую, то вторая прямая тоже пересекает эту прямую. Подобное свойство справедливо и в пространстве.

Теорема 4.2. Если одна из двух прямых, заданных в пространстве, пересекает плоскость, то и вторая прямая тоже пересекает эту плоскость.

Доказательство. Пусть b и c заданные прямые и одна из них – прямая b – пересекает плоскость β в точке M (рис.2).



Так как прямые b и c параллельны, то они лежат в одной плоскости. Пусть эта плоскость – γ.

Точка M общая для плоскостей β и γ. Тогда по аксиоме S3 эти плоскости пересекаются по единственной прямой l. Эта прямая лежит в плоскости γ и пересекает прямую b в точке M. Поэтому эта прямая пересекает и прямую c, параллельную прямой b в точке N.

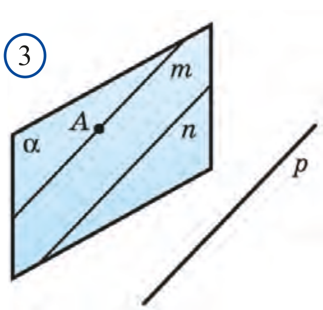
Так как прямая l также лежит в плоскости β, то и точка N принадлежит плоскости β. Следовательно, точка N – общая точка плоскостей β и γ.

Теперь покажем, что прямая c не имеет другую общую точку c плоскостью β. Предположим обратное. Пусть прямая c имеет и другую общую точку K c плоскостью β. Тогда по аксиоме S2 прямая c лежит в плоскости β. Тогда прямая c является общей для плоскостей β и γ. Но такой прямой была l. Отсюда вытекает совпадение прямой c с прямой l. А этого не может быть, так как прямая b параллельна прямой c и пересекает прямую l. Это противоречие указывает неверность нашего допущения.❑

Как вам известно из планиметрии, что если каждая из двух прямых параллельна некоторой прямой, то они взаимно параллельны. Это свойство справедливо в пространстве и называется признаком параллельности.

Теорема 4.3. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они взаимно параллельны.

Доказательство. Предположим, что прямые m и n параллельны прямой p. Докажем, что прямые m и n лежат в одной плоскости и не пересекаются, *т.е параллельны.*



На прямой m отметим какую-нибудь точку A и через эту точку и прямую n проведем плоскость α. Докажем, что прямая m лежит в этой плоскости α.

Предположим, что это не так. Так как прямая m имеет общую точку с плоскостью α, то она пересекает эту плоскость. Тогда по теореме 4.2 эту плоскость пересекают и прямая p, параллельная прямой m, и прямая n тоже параллельная прямой p. Но такое невозможно, так как прямая n лежит в плоскости α. Следовательно, прямые

m и n лежат в плоскости α (рис.3).

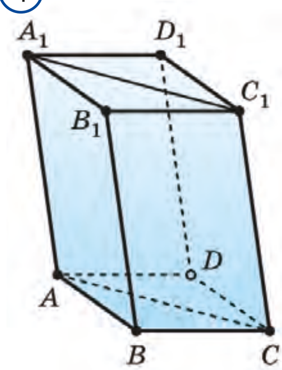
Теперь докажем, что эти прямые не пересекаются. Опять предположим обратное. Допустим, что m и n пересекаются в некоторой точке B. Тогда через точку B проходят две прямые m и n, параллельные прямой p. По теореме 4.1 такое невозможно.❑

Теперь докажем следующие свойства параллелепипеда.

Свойство 1. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис.4) четырехугольник ACC_1A_1, образованный из боковых ребер и диагоналей оснований, является параллелограммом.

Действительно, грани ABB_1A_1 и BCC_1B_1 по определению параллелепипеда, параллелограммы.

4



Противоположные стороны этих параллелограммов взаимно равны. В частности, $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$.

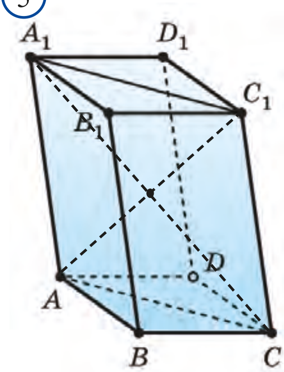
По определению параллелепипеда $AA_1 \parallel BB_1$ и $BB_1 \parallel CC_1$.

Тогда по теореме 4.2, $AA_1 \parallel CC_1$ и $AA_1 = CC_1$. Следовательно, четырехугольник AC_1CA_1 – параллелограмм.

Свойство 2. Противоположные грани параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взаимно равны.

По вышеприведенному свойству, AC_1CA_1 – параллелограмм и $AC = A_1C_1$. Тогда треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам, углы ABC и $A_1B_1C_1$ также равны. В результате параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ тоже взаимно равны.

5



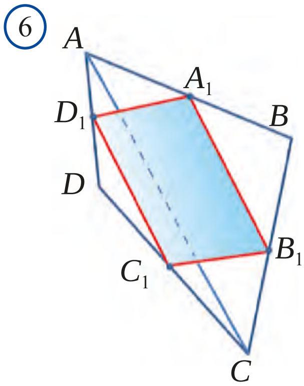
Равенства остальных граней тоже доказывается подобным образом.

Свойство 3. Все диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и в этой точке делятся пополам (рис.5).

По свойству 1 AC_1CA_1 –параллелограмм. Тогда диагонали этого параллелограмма A_1C va AC_1 пересекаются в одной точке и в точке деления делятся пополам.

Подобным образом доказывается пересечение остальных диагоналей и их деление пополам в этой точке пересечения.

Отрезки (лучи), лежащие на одной прямой или на параллельных прямых называются *взаимно параллельными отрезками (лучами)*.



Задача. Докажите, что середины сторон пространственного четырехугольника, вершины которого не лежат в одной плоскости, являются параллелограммом.

Доказательство. Допустим, что $ABCD$ – пространственный четырехугольник, а A_1, B_1, C_1 и D_1 – середины сторон данного четырехугольника (рис.6). Тогда отрезок A_1B_1 – средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AC, а C_1D_1 – средняя линия треугольника ACD параллельная стороне AC.

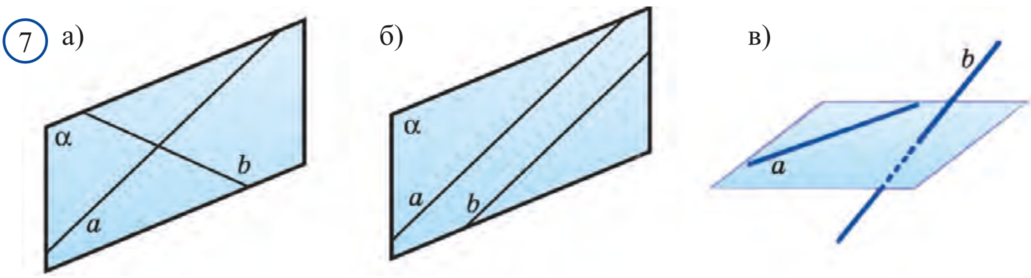
По теореме 4.3 прямые A_1B_1 и C_1D_1 параллельны. Следовательно, они лежат в одной плоскости.

Точно таким же образом доказывается параллельность прямых A_1D_1 и B_1C_1.

Таким образом, четырехугольник, $A_1B_1C_1D_1$ лежит в одной плоскости, а его противоположные стороны параллельны. Следовательно, он является параллелограммом.❑

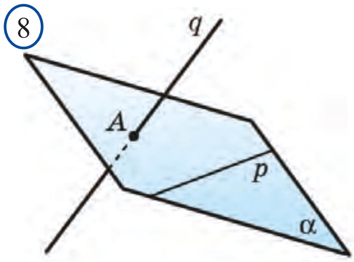
Если две прямые в пространстве взаимно пересекаются или взаимно параллельны, то они лежат в одной плоскости (рис.7а и 7б). В пространстве прямые, не лежащие в одной плоскости называются *скрещивающиемися прямыми* (рис.7.в).

Скрещивающиеся прямые можно определить по следующему признаку:



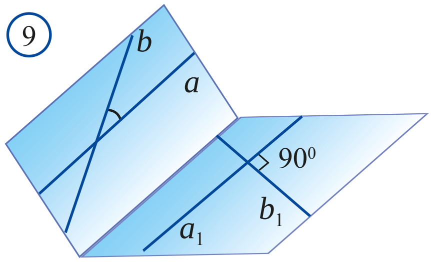
Теорема 4.4. Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.

Доказательство. Допустим, что прямая p лежит в плоскости α, прямая q пересекает эту прямую в точке A, не принадлежащей прямой p (рис.8). Докажем, что прямые p и q – скрещивающиеся прямые.



Предположим обратное: пусть прямые p и q лежат в некоторой плоскости β. Тогда плоскости β принадлежит и прямая p и точка A. В свою очередь, точка A принадлежит и плоскости β. Следовательно, плоскости α и β совпадают. В результате получилось, что прямая q, не принадлежащая плоскости α по условию, принадлежит ей. Полученное противоречие показывает неверность нашего допущения. ❑

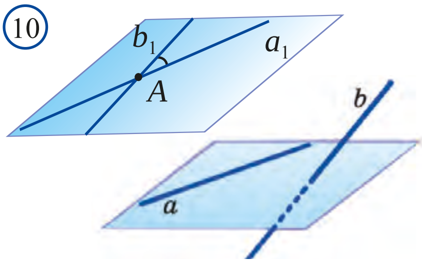
9



Меньший из двух прилежащих углов, получившихся при пересечении двух прямых, называется *углом между прямыми*.

Углом между скрещивающиемися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным прямым (рис.9).

10



Для нахождения угла между скрещивающимися прямыми (рис.10):

1) выбирается некоторая точка A;

2) из точки A проводятся прямые a_1 и b_1, параллельные скрещивающимся прямым;

3) измеряется угол между этими прямыми.

Подумайте о независимости результата этого алгоритма от точки A.

Две прямые называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен $90°$. Угол между параллельными прямыми считается (принимается) равным $0°$.

? *Вопросы к теме и упражнения*

1. *Какие свойства прямых вы знаете?*
2. *Сформулируйте признак параллельности прямых.*
3. *Какие свойства параллелепипеда вы знаете?*
4. *Сформулируйте признак скрещивающихся прямых.*
5. *Как определяется угол между прямыми?*
6. *Могут ли быть параллельными скрещивающиеся прямые?*

4.1. Определите пары параллельных ребер: а) параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ б) призмы $ABCA_1B_1C_1$.

4.2. Какие пирамиды имеют параллельные ребра?

4.3. В плоскости, если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и вторую прямую. Справедливо ли это свойство и в пространстве?

4.4. Найдите верные утверждения:

а) В пространстве через точку, не лежащую в прямой, можно провести множество прямых, параллельных этой прямой;

б) две прямые, параллельные третьей прямой, взаимно пересекаются;

в) если две прямые лежат в плоскости, то они пересекаются;

г) через прямую и точку, не лежащую в ней, можно провести две разные плоскости; д) через точку в пространстве, не лежащую в плоскости, можно провести множество прямых, пересекающих эту плоскость.

4.5. В отрезке AB вершина которого A лежит в плоскости α, выбрана точка C. Параллельные прямые, проведенные через точки B и C пересекают плоскость α в точках B_1 и C_1 соответственно. Найдите длину отрезка CC_1, если а) C середина отрезка и BB_1 =14 см; б) AC:CB = 3:2 и BB_1 = 50 см.

4.6. Даны параллелограмм $MNOP$ и трапеция $MNEK$ с основанием EK не лежащие в одной плоскости. а) определите взаимные расположения прямых PO и EK; б) основания трапеции MN = 45 см, EK = 55 см и можно вписать в нее окружность. Найдите периметр треугольника.

4.7. Прямые a и b лежат в одной плоскости. Покажите их всевозможные взаимные расположения.

А) a и b параллельны; б) a и b пересекаются; в) a и b не пересекаются; г) a и b скрещивающиеся прямые; д) a и b не параллельны.

4.8. Прямые a и b параллельны прямой c. Как могут взаимно расположиться прямые a и b?

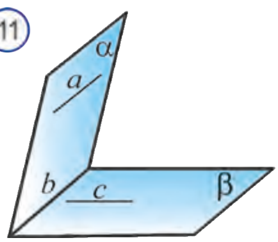
4.9. На рис.11 плоскости α и β пересекаются по прямой b. $a||b$, но прямые c и b не параллельны. Определите взаимное расположение прямых a и c.

4.10. На рис.12 точка M лежит на внешней области трехугольника ABC. Найдите скрещивающиеся прямые с прямыми MA, MC, MB.

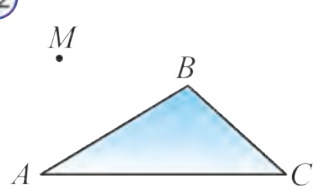
4.11. На рис.13 прямая PQ лежит во внешней области четырехугольника $ABCD$ и параллельна BC. Какие прямые а) PQ и AB; б) PQ и CD; в) PQ и AD ?

4.12. На рис.14 точка M лежит во внешней области треугольника ABC. Середина отрезков MA, MB, MC, обозначена соответственно точками K, F, P. какие из этих прямых взаимно параллельны: 1) KP; 2) PF; 3) KF; 4) KM; 5) PM; 6) FM; 7) AB; 8) BC; 9) AC ?

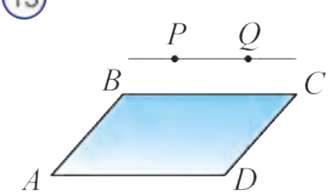
11



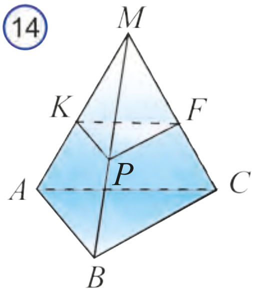
12



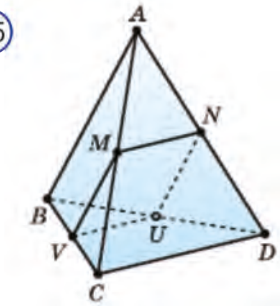
13



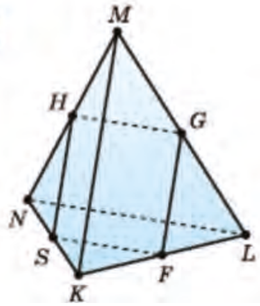
14



15



16



4.13. Точки *M, N, U, V* соответственно середины ребер *AC, AD, BD* и *BC* пирамиды *ABCD* (рис.15). Найдите периметр четырехугольника *MNUV*, если $AB = 20$ см, $CD = 30$ см .

4.14. Точки *H, G, F, S* соответственно середины ребер *MN, ML, LK* и *KN* пирамиды *KLMN* (рис.16). Найдите периметр четырехугольника *HGFS*, если $LK = 18$ мм, $MN = 22$ мм.

4.15. Из прямой можно провести две разные плоскости. Докажите.

4.16. Даны четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько плоскостей можно провести через три из них?

4.17. Точки *A, B, C* лежат в каждой из двух плоскостей. Докажите, что эти точки лежат в одной плоскости.

4.18. Даны две плоскости, пересекающиеся по прямой *a*. Прямая *b* лежит в одной из них и пересекает вторую. Докажите, что прямые *a* и *b* пересекаются.

4.19. Из трех плоскостей каждые две взаимно пересекаются. Докажите, что если из прямых пересечения плоскостей две пересекаются, то третья прямая пересечения тоже проходит через эту точку.

4.20. Если диагонали четырехугольника пересекаются, то его вершины лежат в одной плоскости. Докажите.

4.21. Точки *K, Z, M, N* соответственно середины отрезков *SA, AC, BC, SB* треугольной пирамиды *SABC*. Найдите периметр четырехугольника *KZMN*, если боковые ребра пирамиды равны *b* и стороны основания равны *a*.

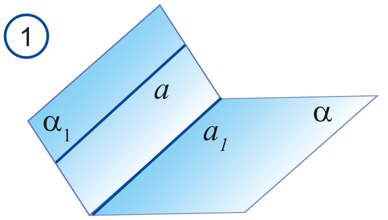
4.22. Прямые *XU* и *VT* параллельны, а прямые *XY* и *VT* скрещивающиеся. Найдите угол между прямыми *XY* и *VT*, если а) $\angle YXU = 40^\circ$; б) $\angle YXU = 135^\circ$; в) $\angle YXU = 90^\circ$.

4.23. Прямая *l* параллельна стороне *BC* параллелограмма *ABCD* и не лежит в его плоскости. Докажите, что прямые *l* и *CD* скрещивающиеся. Найдите угол между прямыми *l* и *CD*, если один из углов пирамиды: а) 58°; б) 133°.

11 ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

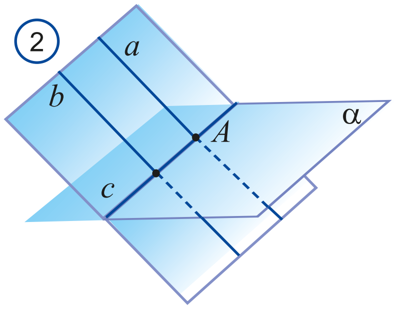
Если прямая и плоскость не пересекаются, *то прямая и плоскость* называются *параллельными*. Параллельность прямой и плоскости определяется по следующему признаку.

Теорема.4.5. ***Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.***



Доказательство. Пусть α – плоскость, a – прямая, не лежащая в ней, a_1 – прямая, лежащая в плоскости α, и параллельная прямой a.

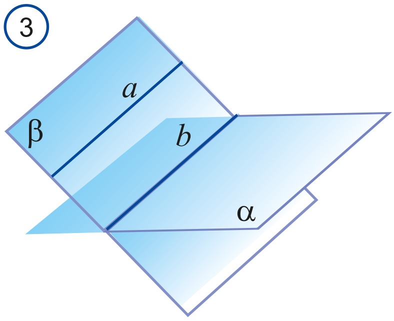
Очевидно, что плоскости α и α_1 пересекаются по прямой a_1 (рис.1).



Если прямая a пересекает плоскость α, то точка пересечения принадлежала бы прямой a_1. Но это невозможно, так как прямые a и a_1 взаимно параллельны. Таким образом, прямая a не может пересекать плоскость α.

Таким образом, прямая a параллельна плоскости α. ❑

Задача. Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и вторую прямую.



Доказательство. Пусть a и b – две параллельные прямые, и α – плоскость, пересекающая прямую a в точке A (рис.2).

Проведем через прямые a и b плоскость. Она пересекает плоскость α по некоторой прямой c. Прямая c пересекает прямую a в точке A, а значит, пересекает параллельную ей прямую b. Так как прямая c лежит в плоскости α, то плоскость α пересекает прямую b.

Теорема 4.6. ***Если плоскость проходит через прямую, которая параллельна другой плоскости, то прямая пересечения этих плоскостей тоже параллельна этой прямой.***

Доказательство. Предположим, что прямая a – параллельна плоскости α и лежит в плоскости β, а прямая b – линия пересечения плоскостей α и β

(рис.3). Тогда прямые a и b лежат в плоскости β и взаимно не пересекаются. В противном случае прямая a пересекала бы плоскость β.

Следовательно, прямые a и b параллельны. ❑

? *Вопросы к теме и упражнения*

1. *Как в пространстве могут располагаться прямая и плоскость?*
2. *Когда прямая и плоскость будут параллельными?*
3. *Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.*
4. *Какие свойства связанные с расположением прямых и плоскостей в пространстве вы знаете?*

4.24. а) Определите взаимно параллельные ребра и грани: б) куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$; в) шестиугольной правильной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

4.25. Выберите верное утверждение:

а) В пространстве через точку, не лежащую на прямой, можно провести множество параллельных прямых к данной прямой;

б) Параллельные прямые, параллельные третьей прямой, пересекаются в одной точке;

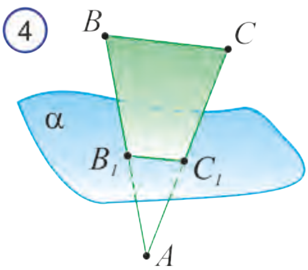
в) Если две точки прямой принадлежат плоскости, то эта прямая пересекает данную плоскость;

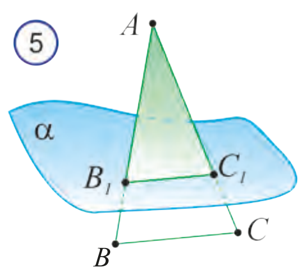
г) Через прямую и через точку, не лежащую в ней, можно провести две разные плоскости;

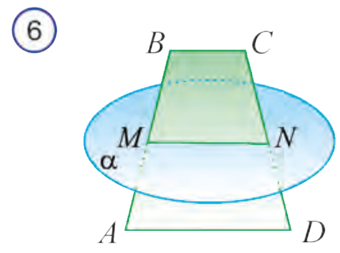
д) В пространстве через точку, не лежащую в данной плоскости, можно провести множество прямых.

4.26. Точки A и C лежат в плоскости α. Точки B и D лежат в плоскости β. Какие из прямых AC, CD, BD, AB, BC и AD пересекают плоскость β?

4.27. Треугольник ABC пересекает плоскость α в точках B_1 и C_1 (рис.4). Если $AB_1 : BB_1 = 2 : 3$, $BC = 15$ см, $BC||B_1C_1$, то найдите длину отрезка B_1C_1.







4.28. Плоскость α пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках B_1 и C_1 (рис. 5). Если $AB_1 : BB_1 = 3 : 1$, $B_1C_1 = 12$ см, $BC \parallel \alpha$, то найдите длину отрезка BC.

4.29. Плоскость α параллельна основанию AD трапеции $ABCD$ и пересекает её боковые стороны в точках M и N (рис.6). Если $AD = 17$ см, $BC = 9$ см, то найдите длину отрезка MN.

4.30. Сколько параллельных прямых можно провести к плоскости через точку, не лежащую в этой плоскости?

4.31. Прямая a параллельна плоскости α. Найдите верные утверждения.

а) Прямая a параллельна только одной прямой плоскости α;

б) Прямая a скрещивающаяся со всеми прямыми плоскости α, кроме одной её прямой;

в) В плоскости α найдутся множества прямых, параллельных и скрещивающихся прямой a;

г) В плоскости α существует только единственная прямая, параллельная прямой a и проходящая через произвольные точки этой плоскости.

4.32. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, точки M, N, K, Z соответственно середины отрезков AD, BD, BC, AC. Если $CD=AB$, то докажите перпендикулярность прямых MK и NZ.

4.33. Стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ пересекают плоскость α. Докажите, что прямые AD и DC тоже пересекают плоскость α.

4.34. Треугольники ABC и ABD не лежат в одной плоскости. Докажите, что произвольная прямая, параллельная прямой CD, пересекает плоскости данных треугольников.

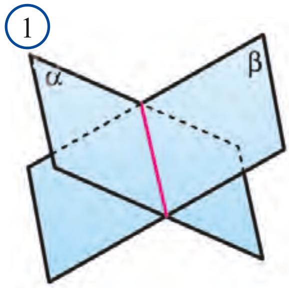
4.35. Прямые, пересекающие заданные две прямые, лежат в одной плоскости. Докажите.

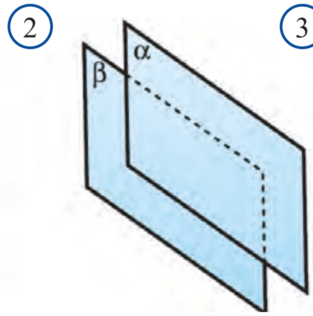
12 ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

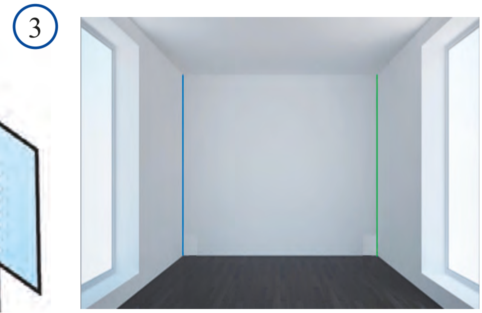
Две плоскости могут иметь общую точку или не иметь ни одной общей точки. В первом случае эти плоскости по аксиоме S3 имеют общую прямую, т.е. пересекаются по прямой (рис.1). Во втором случае плоскости не пересекаются (рис.2).

Непересекающиеся плоскости называются *параллельными*.

Представление о параллельных плоскостях дают пол и потолок комнаты, две противоположные стены (рис.3).

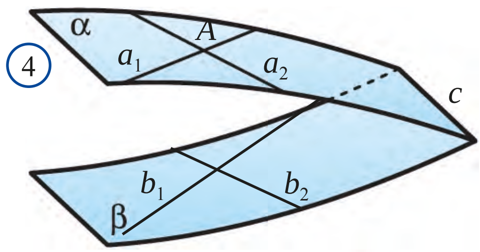






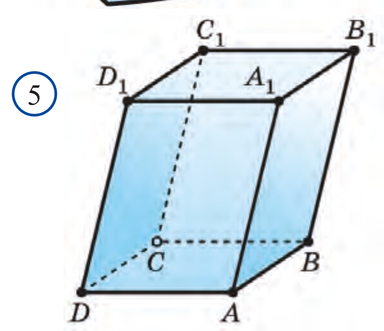
Параллельность плоскостей определяется по следующему признаку.

Теорема 4.7. ***Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.***



Доказательство. Допустим, что α и β – заданные плоскости, a и b – прямые, лежащие в плоскости α и пересекающиеся в точке A, а a_1 и b_1 – прямые, лежащие в плоскости β, и соответственно параллельные прямым a и b (рис.4).

Предположим, что плоскости α и β взаимно не параллельны, т.е. пересекаются по некоторой прямой c. По теореме 4.6, прямые a_1 и a_2 параллельны соответственно прямым, b_1 и b_2, а также параллельны плоскости β. Поэтому они не пересекают прямую c, лежащую в этой плоскости.



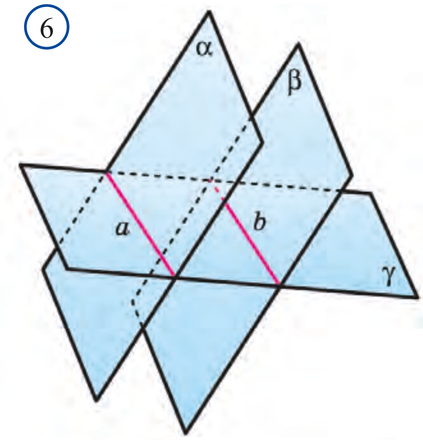
Таким образом, через точку A лежащей в плоскости α проходят две прямые a_1 и a_2, параллельные прямой c.

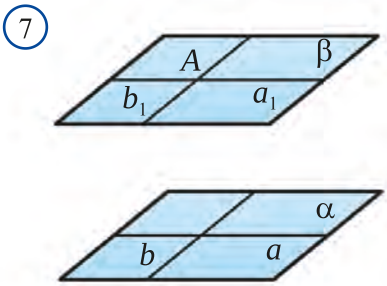
По аксиоме параллельности это невозможно. Полученное противоречие показывает неверность нашего допущения.❑

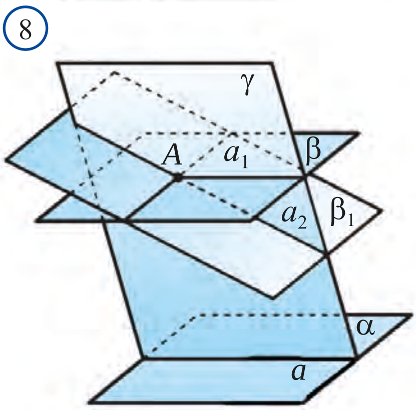
Пользуясь этой теоремой, докажите параллельность боковых граней параллелепипеда (рис.5).

Теорема 4.8. ***Прямые пересечения двух плоскостей с третьей взаимно параллельны.***

Доказательство. Пусть параллельные плоскости α и β пересекают плоскость γ соответсвенно по прямым a и b (рис.6). Докажем параллельность прямых a и b.







Предположим, что прямые a и b пересекаются в некоторой точке Q. Тогда точка Q лежит в плоскости α, так как прямая a лежит в плоскости α. А также точка Q лежит в плоскости β, так как прямая b лежит в плоскости α. В результате получается, что плоскости α и β имеют общую точку Q. А это невозможно по условию. Полученное противоречие указывает неверность нашего допущения.❑

Теорема 4.9. ***Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной и притом только одну.***

Доказательство. Проведем в данной плоскости α две пересекающиеся прямые a и b (рис.6). Через данную точку A проведем параллельные им прямые a_1 и b_1. Проведем через прямые a_1 и b_1 плоскость β. Эта плоскость β по теореме 4.7 параллельна плоскости α, т.е. является искомой плоскостью.

Теперь докажем единственность этой плоскости. Предположим, что существует еще одна плоскость $β_1$, параллельная плоскости α (рис.8). Проводим через точку A и прямую a плоскость γ. Эта плоскость пересекает плоскость β по прямой a_1, плоскость $β_1$ по прямой a_2. Прямые a_1, a_2 по теореме 4.6 параллельны прямой a. Но это невозможно, так как в плоскости через точку, не лежащую в ней, можно провести только единственную параллельную прямую. Это противоречие указывает неверность нашего допущения.❑

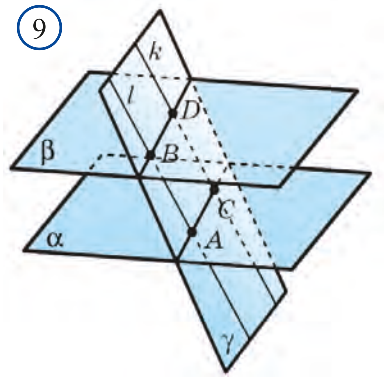
Теорема 4.10. ***Две плоскости, параллельные третьей плоскости, взаимно параллельны.***

Докажите теорему самостоятельно.

Теорема 4.11. ***Отрезки параллельных прямых, заключенных между параллельными прямыми равны.***

Доказательство. Пусть плоскость α и β отделяют из прямых k и l отрезки AB и CD (рис. 9.). Докажем равенство этих отрезков. Плоскость α_1, проходящая через прямые k и l, пересекает параллельные плоскости по прямым AC и BD. В результате имеем четырёхугольник $ABCD$ т.е. параллелограмм. Противоположные стороны параллелограмма взаимно равны. В частности, $AB = CD$. ❑

9



4.12- теорема. Отрезки произвольных параллельных прямых, заключенных между тремя параллельными плоскостями, взаимно пропорциональны.

Докажите эту теорему тоже самостоятельно.

Вопросы к теме и задания

1. Как могут располагаться плоскости в пространстве?
2. Какие плоскости называются параллельными?
3. Сформулируйте признак параллельности плоскостей.
4. Какие свойства вы знаете по расположению плоскостей в пространстве?
5. Обоснуйте параллельность боковых граней параллелепипеда.

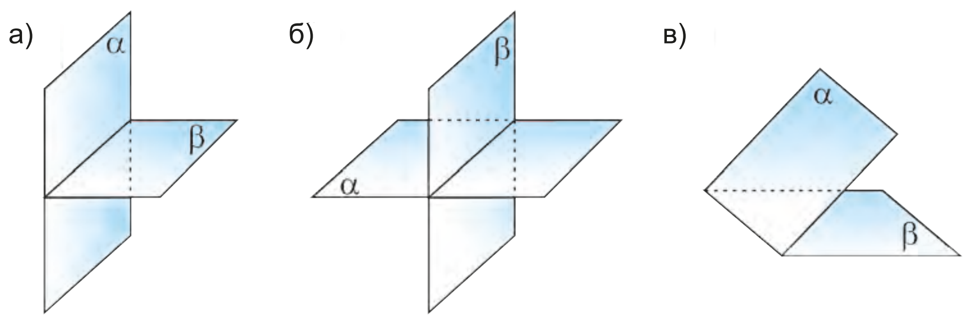
4.36. а) Определите параллельные грани: а) параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$; б) призмы $ABCA_1B_1C_1$.

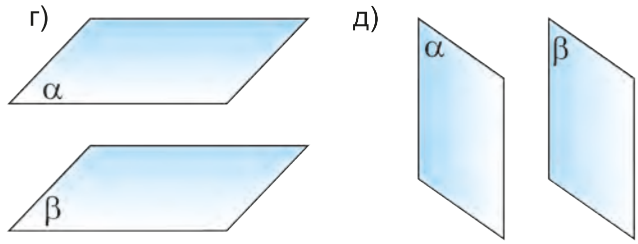
4.37. Как расположатся в пространстве плоскости α и β, не имеющие ни одной общей точки?

4.38. Плоскости α и β параллельны. Прямые a и b лежат в плоскости α, а прямые c и d в плоскости β. Какие из следующих утверждений верны?

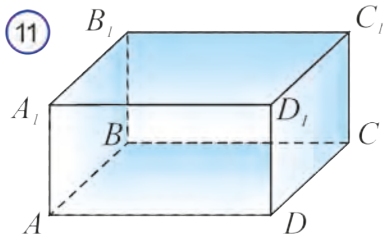
1) $a \parallel b$; 2) $c \parallel b$; 3) $b \parallel b$; 4) $b \parallel a$; 5) $c \parallel a$; 6) $d \parallel b$; 7) $a \parallel a$; 8) $d \parallel a$.

10





11



4.39. Укажите три рисунка, на которых изображены две пересекающиеся плоскости (рис.10).

4.40. Плоскости α и β параллельны. Из точки, не принадлежащей ни одной из них, проведена плоскость γ. Укажите верные утверждения:

а) Плоскость γ единственная плоскость, параллельная плоскости α;

б) Плоскость γ единственная плоскость, пересекающая плоскость β;

в) Плоскость γ единственная плоскость, параллельная плоскости β;

г) Плоскость γ единственная плоскость, пересекающая плоскость α;

д) Плоскость γ единственная плоскость, параллельная и плоскости α, и плоскости β.

4.41. На рис. 11 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Определите взаимное расположение плоскостей: а) $A_1B_1C_1D_1$ и B_1A_1AB; б) ADD_1A_1 и $ABCD$; в) ABB_1A_1 и C_1D_1DC; г) $BADC$ и ABB_1A_1; д) CC_1B_1B и ADD_1A_1.

4.42. Отрезки AB, BC – стороны параллелограмма $ABCD$ и параллельны соответственно прямым a и b (рис.12). Прямые a и b взаимно пересекаются и принадлежат плоскости α. Определите взаимное расположение параллелограмма $ABCD$ и плоскости α.

4.43. Даны скрещивающиеся прямые a и b в пространстве. Сколько плоскостей можно провести через прямую a, параллельную плоскости β?

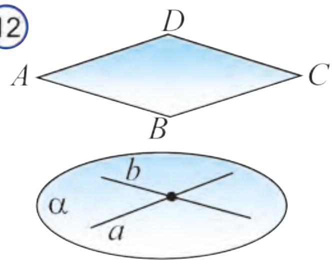
4.44. Прямая пересечения двух плоскостей α и β параллельна третьей плоскости γ. Определите взаимное расположение плоскостей α и β в пространстве.

4.45. Плоскость γ, проведенная через параллельные прямые AB и CD пересекает параллельные плоскости α и β соответственно по прямым AC и BD (рис.13). Найдите длину отрезка AC, если $BD = 15$ см.

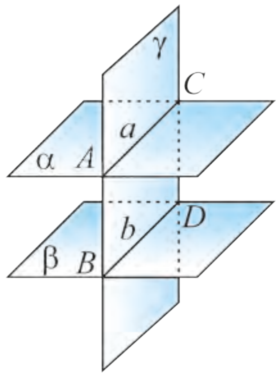
4.46. Через две произвольные скрещивающиеся прямые можно провести единственную пару параллельных плоскостей. Докажите.

4.47. Плоскости α и β параллельны. Произвольная прямая, лежащая в плоскости α, параллельна плоскости β. Докажите.

4.48. Точка O – общая середина отрезков AA_1, BB_1, CC_1, не лежащих в одной плоскости. Докажите параллельность плоскостей ABC и $A_1B_1C_1$.

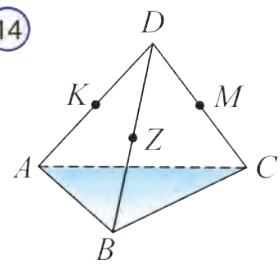
12


4.49. Даны параллелограмм $ABCD$ и не пересекающая его плоскость. Через вершины параллелограмма A, B, C, D проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость, соответственно в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Найдите длину отрезка DD_1, если AA_1 = 4 м, BB_1 = 3 м и CC_1 = 1 м .

13


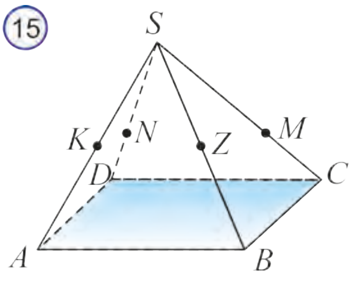
4.50. Даны две параллельные плоскости. Через точки A и B одной из плоскостей проведены параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость в точках A_1 и B_1. Найдите длину отрезка, A_1B_1, если $AB = a$.

4.51. Плоскости α и β параллельны. Через точки M и N плоскости α проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость β в точках K и L. Докажите, что $MNLK$ – параллелограмм. Найдите периметр четырехугольника $MNLK$, если ML = 14 см, NK = 8 см и $MK : MN$ = 9 : 7.

14


4.52. Лучи OF и OP пересекают параллельные плоскости α и β, соответственно в точках F_1, P_1, F_2, P_2. Найдите длину отрезка OP_1, если F_1P_1 = 3 см, F_2P_2 = 5 см и P_1P_2= 4 см.

4.53. Лучи OA и OB пересекают параллельные плоскости α и β, соответственно в точках A_1, B_1, A_2, B_2. Найдите длину отрезка A_1B_1, если OA_1 = 16 см, A_1A_2 = 24 см и A_2B_2= 50 см.

15


4.54. Точка D не принадлежит плоскости треугольника ABC (рис.14.). Точки K, M, Z, соответственно середины отрезков DA, DB и DC. Определите взаимное расположение плоскости ABC и KZM.

4.55. Точка S не принадлежит плоскости параллелограмма $ABCD$ (рис.15). Точки K, Z, M, N принадлежат соответственно отрезкам SA, SB, SC и SD. Определите взаимное расположение плоскости $ABCD$ и $KZMN$, если $SK = AK$, $SZ = BZ$, $SM : MC$ = 2 : 1, $SN : ND$ = 2 : 1.

13 ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пространственные фигуры изображаются в плоскости разными способами. Ознакомимся с ними.

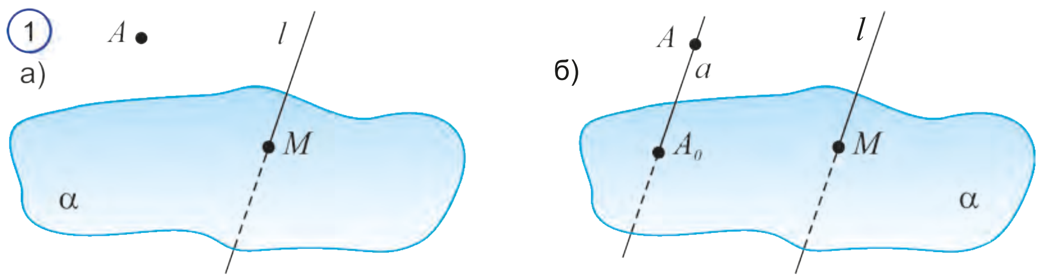
Параллельным проектированием пространственной фигуры в плоскость называется такое отображение, при котором каждая точка фигуры переносится в плоскость по прямым, параллельным заданному направлению проектирования.

Параллельное проектирование можно сравнить с тенью некоторого предмета на стене, созданного с помощью лучей света.

Таким образом, при параллельном проектировании берется некоторая фигура и плоскость, называемая *плоскостью проектирования*, а также выбирается *направление проектирования*, т.е. некоторая прямая. Эта прямая проектирования должна пересекаться с плоскостью проектирования.

Предположим, что заданы произвольная плоскость α и прямая проектирования l, а также точка A, не лежащая ни в плоскости α, ни в прямой l (рис.1а).

Через точку A проведем прямую a, параллельную прямой l к плоскости α. Пусть эта прямая пересекает плоскость α в точке A_0 (рис.1б).



Найденная точка A_0 называется параллельной проекцией точки A в плоскость α.

Предположим, что нужно параллельно проектировать некоторую фигуру F в плоскость α по направлению l. Для этого берем произвольную точку фигуры F, проведем через нее прямую, параллельную прямой l и обозначим ее точку пересечения с плоскостью α. Такие точки образуют в плоскости α некоторую фигуру F_1. И эта фигура F_1 является параллельной проекцией фигуры F в плоскости α.

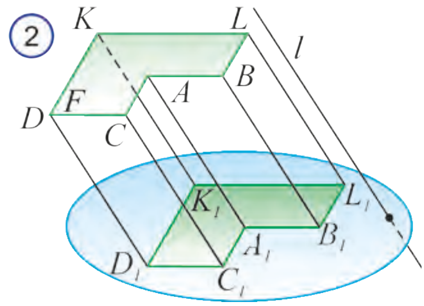
На рис.2 изображена параллельная проекция фигуры F в плоскость α, т.е. фигура F_1.

Приведем следующие свойства параллельного проектирования. Докажите их самостоятельно.

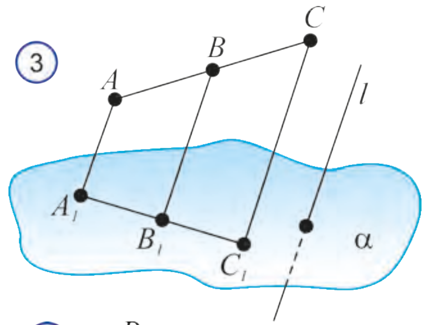
При параллельном проектировании точка переходит (отображается) в точку, отрезок в отрезок, прямая в прямую. Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают.

Докажем следующие свойства.

Свойство 1. ***Проекции прямолинейных отрезков фигуры также являются отрезками.***

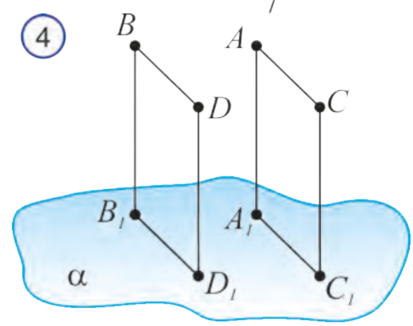


Действительно, все прямые, проектирующие точки отрезка AC, лежат в плоскости, пересекающей плоскость по прямой A_1C_1 (рис.3). Произвольная точка B отрезка AC переносится в точку B_1 отрезка A_1C_1.❑



Свойство 2. ***Проекции параллельных отрезков фигуры также параллельные отрезки.***

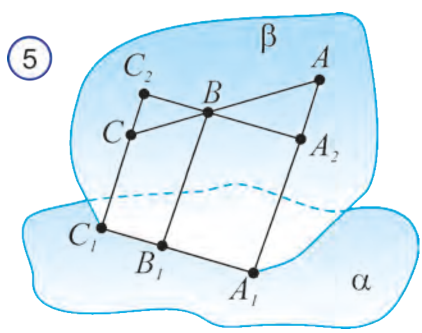
Пусть AC и BD параллельные отрезки некоторой фигуры (рис.4). Их проекции – A_1C_1 и B_1D_1 также отрезки, так как они получились при пересечении плоскости α двух параллельных плоскостей.



Свойство 3. ***Отношение длинн отрезков, лежащих на прямой или на параллельных прямых, равно отношению длин их проекций.***

Действительно, прямые AC и A_1C_1 на рис.5 лежат в плоскости β. Через точку B на отрезке AC проведем прямую A_2C_2 параллельную A_1C_1 .

Полученные треугольники BAA_2 и BCC_2 подобны. Из подобия треугольников и равенств $A_1B_1=A_2B$ и $B_1C_1=BC_2$ получим искомое отношение: $AB:BC = A_1B_1:B_1C_1$. ❑



Таким образом, при параллельном проектировании сохраняются отношение длин отрезков, лежащих на прямой или на параллельных прямых.

В частности, середина отрезка переходит в середину проекции.

? *Вопросы к теме и упражнения*

1. Каким отображением называется проектирование пространственной фигуры в плоскость?

2. Как находится параллельная проекция точки в плоскости?

3. Что называется плоскостью параллельного проектирования и направлением проектирования?

4. Какие свойства параллельного проектирования вы знаете?

5. Где можно использовать параллельное проектирование?

4.56. При параллельном проектировании может ли быть проекция отрезка: а) отрезком; б) точкой; в) двумя точками; г) лучом; д) прямой?

4.57. При параллельном проектировании может ли быть проекция квадрата: а) квадратом; б) параллелограммом; в) ромбом; г) прямоугольником; д) трапецией; е) отрезком?

4.58. Докажите, что при параллельном проектировании треугольника, лежащего в одной из параллельных плоскостей во вторую плоскость, его площадь не изменяется.

4.59. Может ли быть параллельная проекция параллелограмма трапецией? Обоснуйте свой ответ.

4.60. Будет ли параллельная проекция правильного треугольника правильным треугольником?

4.61. Будет ли параллельная проекция прямоугольного треугольника прямоугольным треугольником?

4.62. Треугольник $A_1B_1C_1$ параллельная проекция треугольника ABC. При таком проектировании переходит ли: а) медиана; б) высота; в) биссектриса треугольника ABC соответственно: а) медиане; б) высоте; в) биссектрисе треугольника $A_1B_1C_1$?

4.63. Треугольник $A_1B_1C_1$ параллельная проекция треугольника ABC. Будет ли $\angle A_1 = 30°$, $B_1C_1 = 20$ см, если $\angle A = 30°$, $BC = 20$ см?

4.64. Отрезок A_1B_1 параллельная проекция отрезка AB. Точка C_1 параллельная проекция точки C отрезка AB. $AB = 48$ см, $A_1B_1 = 36$ см. Найдите длину отрезка A_1C_1, если длина отрезка AC: а) 24 см; б) 12 см; в) 8 см; г) 32 см; д) 36 см.

14 ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

4.65. Сколько общих точек могут иметь: а) две прямые; б) прямая и плоскость; в) две плоскости?

4.66. Могут ли иметь а) две прямые; б) прямая и плоскость; в) две плоскости три плоскости единственную общую точку?

4.67. Четыре точки не лежат в одной плоскости, а) лежат ли три из них на одной прямой? б) Сколько плоскостей можно провести через них?

4.68. Прямые m и n пересекаются, а прямая d параллельна прямой n. Как могут взаимно располагаться прямые m и d ?

4.69. Сколько можно провести плоскостей, проходящих через вершину C и параллельных сторону AB треугольника ABC ?

4.70. Параллелограммы $ABCD$ и $ABKZ$ лежат в разных плоскостях. Укажите параллельные прямые:

а) DA и KB; *б*) CD и KZ; *в*) BC и AZ; *г*) DA и ZA; *д*) CB и KB.

4.71. Точки A и C принадлежат плоскости α, точки B и D принадлежат плоскости β. Какие из прямых AC, CD, BD, AB, BC, AD пересекают плоскость β?

4.72. Отрезки AB, AC, KB, KD пересекают плоскость α. Какие из прямых AK, AD, BD, KC, CD пересекают плоскость α?

4.73. Прямые AB, AC и AD, не лежащие в одной плоскости, пересекают плоскость α в точках B_1, C_1 и D_1. Какая фигура получается при последовательном соединении точек B_1, C_1 и D_1?

4.74. Через вершины и середины отрезка MN, не пересекающей плоскость α, проведены параллельные прямые. Если эти прямые пересекли плоскость α соответственно в точках M_1, N_1, и K_1 и KK_1= 9 см, NN_1 = 15 см, то найдите длину отрезка MM_1.

4.75. Из точек P и Z плоскости α опущены параллельные отрезки длиной PK = 6 см и ZM = 9 см. Прямая MK пересекает плоскость α в точке O. Найдите длину отрезка MO, если MK = 6 см.

4.76. Может ли получиться квадрат при параллельном проектировании параллелограмма?

4.77. Дана параллельная проекция треугольника. Как строятся проекции медиан этого треугольника?

4.78. Треугольник MNZ и параллелограмм $MNPS$ (BC – основание) не лежат в одной плоскости. Точки Q и R середины отрезков CB и DA, а M и N середины отрезков DP и CZ. Докажите параллельность прямых MN и QR.

4.79. Какие из граней: а) AA_1D_1D; б) BB_1C_1C; в) $ABCD$; г) DD_1C_1C; д) $B_1C_1D_1A_1$; е) ADD_1A_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис.6) параллельны прямой A_1B_1?

4.80. Дан треугольник PRT. Плоскость α, параллельная прямой PT, пересекает сторону PR в точке S, сторону RT в точке Q (рис.7). Найдите длину стороны PT, если SR = 7 см, SQ = 3 см и SR= 35 см.

4.81. Плоскость α параллельна основанию AD трапеции $ABCD$ и пересекает ее стороны AB и CD в точках M и N (рис.8). AD = 20 см, MN = 16 см. Найдите периметр трапеции, если точка M середина отрезка AB и AB= 8 см.

4.82. В точки P и Z плоскости α проведены внешне отрезки $PK = 6$ см и $ZM = 9$ см. Прямая MK пересекает плоскость α в точке O. Найдите расстояние MO, если $MK = 6$ см.

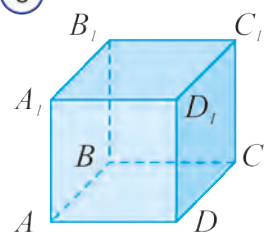
4.83. Сторона AB прямоугольника $ABCD$ параллельна плоскости α, а сторона AD не параллельна этой плоскости. Определите взаимное расположение в пространстве прямоугольника $ABCD$ и плоскости α.

4.84. Какие нижеприведенные грани прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллельны вершине A и грани $ABCD$:

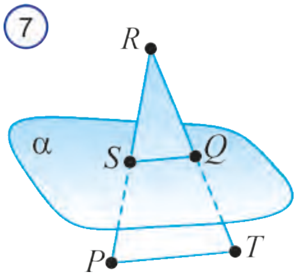
а) D_1A_1AD; б) $D_1A_1B_1C_1$; в) ABB_1A_1; г) D_1C_1CD; д) D_1A_1BD?

4.85. Две диагонали ромба параллельны плоскости α. Определите взаимное расположение в пространстве плоскости ромба и плоскости α.

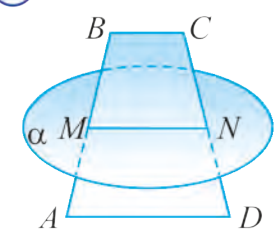
6



7



8



4.86. Точка D не лежит в плоскости треугольника ABC. Точки K, Z и M соответственно середины отрезков DA, DB и DC. Определите взаимное расположение плоскостей ABC и KZM.

Применение и формирования практических компетенций

1. Как расположены оси железнодорожных вагонов в отношении друг к другу?
2. Как расположены оси железнодорожных вагонов в отношении рельсов?
3. Приведите примеры из окружающей среды на параллельны и скрещивающиеся прямы.
4. Почему ящики письменных столов иногда не открываются плавно?
5. Почему поршень насоса плавно двигается внутри него?
6. Как можно проверить параллельность плинтусов пола с помощью ленты для шитья или палочки произвольной длины?
7. Все грани деревянного бруса имеют формы прямоугольника. Докажите, что как бы его не распилить, все сечения получаются параллелограммом.

РАЗДЕЛ V

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

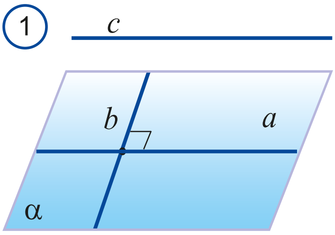
15 ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Напомним, что две прямые в плоскости называются *взаимно перпендикулярными*, если угол между ними равен 90°. Перпендикулярные прямые могут пересекаться или могут быть скрещивающимися. На рис. 1 перпендикулярные прямые a и b пересекаются, а перпендикулярные прямые b и c скрещивающиеся. Перпендикулярность прямых a и b обозначаются так: $a \perp b$.

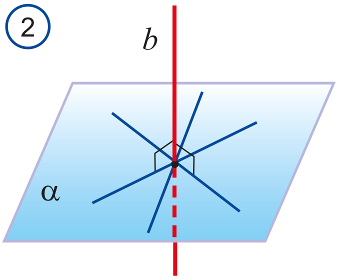
Прямая называется *перпендикулярной к плоскости*, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости. Перпендикулярность прямой b и плоскости α обозначаются так: $b \perp \alpha$ (рис.2).

Можно привести множество примеров перпендикулярных фигур из окружающей среды. Обычно стены домов, колонны, столбы освещения и электрические столбы строятся или устанавливаются по отношению к земле прямо

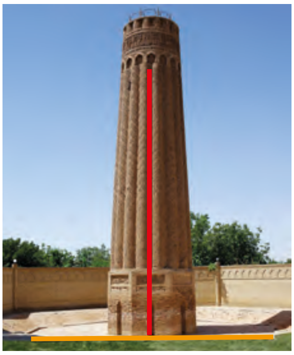
1



2



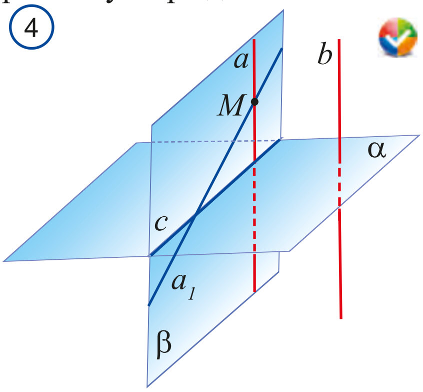
3



т.е. перпендикулярно. Шкафы, столы и холодильник также устанавливаются прямо по отношению к полу (рис.3).

Теперь рассмотрим некоторые свойства перпендикулярных прямых в пространстве.

Если прямая a лежит в плоскости α или параллельна ей, то найдётся прямая b, лежащая в плоскости α и параллельная прямой a. Поэтому перпендикулярная к плоскости прямая пересекает эту плоскость. Верно и обратное утверждение.



Теорема 5.1. Если две прямые a и b перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

Доказательство. Пусть прямая a и b перпендикулярна к плоскости α (рис.4) Докажем параллельность прямых a и b. Проведем через некоторую точку M прямой a прямую a_1, параллельную прямой b.

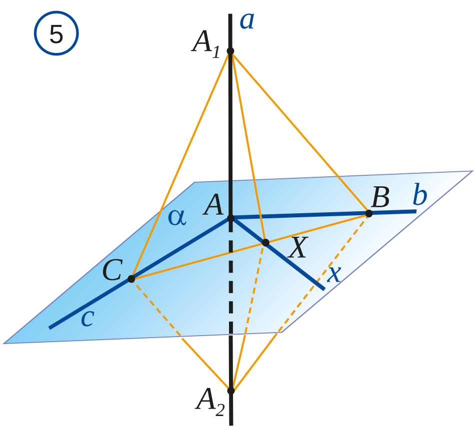
Тогда, $a_1 \perp \alpha$.

Покажем, что прямые a и a_1 совпадают. Допустим, что это не так, т.е. прямые a и a_1 не совпадают. Тогда в плоскости β содержащей прямые a и a_1 – через точку M проходят две прямые, a и a_1 перпендикулярные к прямой c, по которой пересекаются плоскости α и β. Но это невозможно.

Противоречие показывает неверность нашего допущения Следовательно, прямые a и b параллельны.❑

Теперь приведем признак перпендикулярности прямой к плоскости.

Теорема 5.2. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.



Доказательство. Допустим, что прямая a перпендикулярна двум прямым b и c, лежащим в плоскости α. Тогда прямая a проходит через точку пересечения A прямых b и c. Докажем перпендикулярность прямой a к плоскости α.(рис.5)

Проведем через точку A плоскости α произвольную прямую x и покажем ее перпендикулярность к прямой a. Проведем прямую в плоскости α, не проходящую через точку A и пересекающую прямые b, c и x. Пусть их пересечения соответственно в точках B, C и X.

В прямой a в разных сторонах точки A отложим отрезки AA_1 и AA_2. Полученные треугольники A_1BA_2 и A_1CA_2 – равнобедренные (обоснуйте это самостоятельно). Отсюда вытекает равенство треугольников A_1BC и A_2BC (тоже обоснуйте самостоятельно). В свою очередь, отсюда вытекает равенство углов A_1BX и A_2BX и наконец, равенство треугольников A_1BX и A_2BX (тоже обоснуйте самостоятельно).

В частности, $A_1X = A_2X$. Тогда треугольник A_1XA_2 равнобедренный. Поэтому его медиана XA является и ее высотой. А это, в свою очередь, показывает перпендикулярность прямой x к прямой a. Следовательно, прямая a перпендикулярна плоскости α.❑

Из этой теоремы вытекает ряд свойств как следствия. Обоснуйте их самостоятельно.

Теорема 5.3. Если прямая перпендикулярна одной из двух плоскостей, то она перпендикулярна и второй плоскости.

Теорема 5.4. Если две плоскости перпендикулярны прямой, то они параллельны.

Теперь приведем свойства, называемые “теоремами существования и единственности” для самостоятельного доказательства.

Теорема 5.5. Через произвольную точку пространства можно провести единственную перпендикулярную плоскость в заданную прямую.

Теорема 5.6. Через произвольную точку пространства можно провести единственную прямую, перпендикулярную заданной плоскости.

Следствие (обобщенная теорема Пифагора). Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его трех измерений.

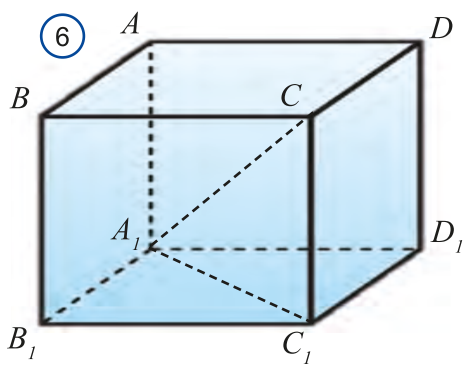
Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямоугольный параллелепипед (рис.6). Поскольку ребро CC_1 перпендикулярно грани $A_1B_1C_1D_1$, то A_1C_1C – прямоугольный треугольник. Тогда по теореме Пифагора

$$A_1C^2 = CC_1^2 + A_1C_1^2. \qquad (1).$$

$A_1D_1C_1$ также прямоугольный. По теореме Пифагора

$$A_1C_1^2 = A_1D_1^2 + D_1C_1^2. \qquad (2).$$

6



Тогда, по (1) и (2): $A_1C^2 = CC_1^2 + A_1C_1^2 = CC_1^2 + A_1D_1^2 + D_1C_1^2$.

Так как $A_1D_1 = B_1C_1$, то $A_1C^2 = CC_1^2 + B_1C_1^2 + D_1C_1^2$. ❑

Вопросы к теме и упражнения

1. Какие прямые в пространстве являются взаимно перпендикулярными?

2. Могут ли быть перпендикулярными скрещивающиеся прямые?

3. Какой город изображен на рис. 7? Какие прямые и плоскости вы видите в нем? Приведите примеры параллельных, перпендикулярных и скрещивающихся прямых на рисунке.

4. Какая прямая является перпендикулярной плоскости?

5. Сформулируйте свойства прямых, перпендикулярных одной плоскости.

6. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.

7. Сформулируйте свойство прямой, перпендикулярной одной из параллельных плоскостей.

8. Сформулируйте свойства плоскостей, перпендикулярных прямой.

9. В чём сущность обобщенной теоремы Пифагора?

5.1. Отрезок SB перпендикулярен плоскости параллелограмма $ABCD$ (рис.8). Назовите прямые, перпендикулярные SB.

5.2. Некоторая прямая l перпендикулярна сторонам AB и AC треугольника ABC. Определите взаимное расположение прямой l и плоскости треугольника ABC.

а) Прямая l пересекает плоскость ABC, но не перпендикулярна ей; б) Прямая l принадлижит плоскости ABC; в) Прямая l перпендикулярна плоскости ABC; г) Прямая l перпендикулярна плоскости ABC.

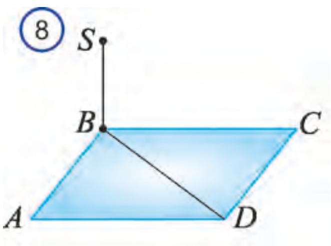
5.3. Прямая KO перпендикулярна плоскости параллелограмма $ABCD$ (рис.9). Определите прямую, перпендикулярную прямой KO.

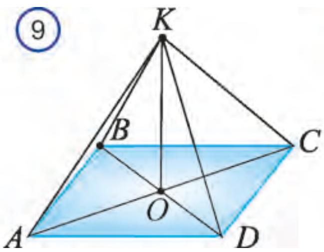
5.4. Прямая MB перпендикулярна сторонам AB и BC треугольника ABC (рис.10). Найдите вид треугольника MBX, если точка X – произвольная точка стороны AC.

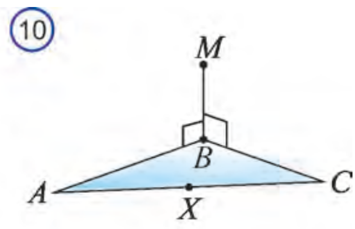
5.5 .Диагональные сечения AA_1C_1C и BB_1D_1D прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взаимно перпендикулярны. Докажите.

5.6. Стороны четырехугольника $ABCD$ параллельны соответственно сторонам прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является прямоугольником.

5.7. Плоскость α параллельна прямой m, а прямая m параллельна прямой n. Докажите перпендикулярность плоскости α прямой n.

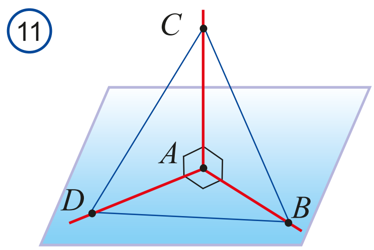






5.8. Прямая, в которой лежит основание AB трапеции $ABCD$ перпендикулярна плоскости α. Прямая, в которой лежит основание CD этой трапеции, тоже перпендикулярна плоскости α. Докажите.

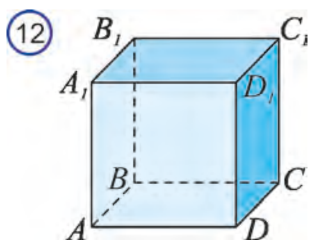
5.9. Докажите, что через любую точку прямой в пространстве можно провести прямую, перпендикулярную этой прямой.



5.10. Через любую точку прямой в пространстве можно провести две разные перпендикулярные прямые к этой прямой. Докажите.

5.11. Прямые AB, AC, AD попарно взаимно перпендикулярны (рис.11). Найдите длину отрезка, CD если

1) $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, $AD = 1{,}5$,см;
2) $BD = 9$ см, $BC = 16$ см, $AD = 5$ см;
3) $AB = b$ см, $BC = a$ см, $AD = d$ см;
4) $BD = c$ см, $BC = a$ см, $AD = d$ см,



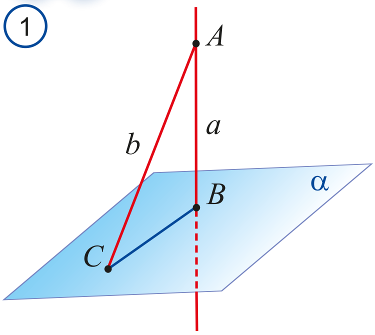
5.12. В вершине A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая AK, перпендикулярная его плоскости. Расстояние от точки K до остальных вершин прямоугольника равно 6 м, 7 м, 9 м. Найдите расстояние AK.

5.13. Через точки A и B проведены к плоскости α перпендикуляр и прямая, пересекающая ее в точках C и D, а отрезок AB не пересекает плоскость α. Найдите расстояние между точками A и B, если $AC = 3$ м, $BD = 2$ м и $CD = 2{,}4$ м.

5.14. Ребро куба, изображенного на рис. 12: а) 4 см; б) 8 см. Найдите периметр треугольника AB_1C и площадь треугольника DAC_1.

16 ПЕРПЕНДИКУЛЯР, НАКЛОННАЯ И РАССТОЯНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

1



Через точку A, не лежащую в плоскости α, проведем перпендикуляр к плоскости α (рис.1). Пусть эта прямая пересекает плоскость в точке B. А также соединим некоторую точку C плоскости с точкой A. Полученные при этом отрезки называются так:

отрезок AB – *перпендикуляр, опущенный в плоскость;*

отрезок AC – *наклонная, опущенная в плоскость;*

отрезок BC – *проекция наклонной в плоскости;*

точка B – *основание перпендикуляра;*

точка C – *основание наклонной.*

2

Треугольник ABC прямоугольный, AB катет, а AC гипотенуза, поэтому $AB < AC$.

Следовательно, длина перпендикуляра, опущенного из некоторой точки в пространстве, меньше длины наклонной, проведённой с этой точки.

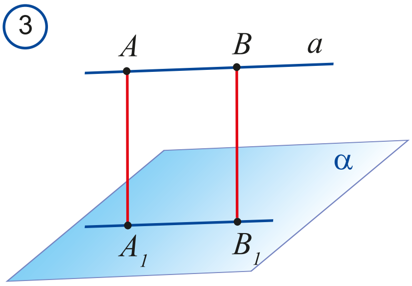
Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Когда говорится, что высота Ташкентских часовых курантов 30 м, понимается, как длина перпендикуляра, опущенного с вершины курантов на плоскость основания (рис.2).

Теорема 5.7. Если прямая параллельна плоскости, то все её точки находятся на одинаковом расстоянии от плоскости.

Доказательство. Пусть a – данная прямая и α – данная плоскость (рис.3). Возьмем на прямой a две произвольные точки A и B. От них опустим перпендикуляры в плоскость α. Пусть основания этих перпендикуляров точки A_1 и B_1 тогда расстояния от точек A и B до плоскости α будут отрезки AA_1 и BB_1. По теореме 4.6 отрезки AA_1 и BB_1 параллельны.

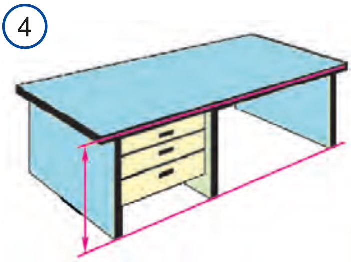
3



Следовательно, они лежат в одной плоскости. Эта плоскость пересекает плоскость α по прямой A_1B_1. Прямая a параллельна прямой A_1B_1, так как она не пересекает плоскость α.

Таким образом, противоположные стороны четырехугольника ABA_1B_1 параллельны. Следовательно, это параллелограмм.

4



В этом параллелограмме $AA_1 = BB_1$.❑

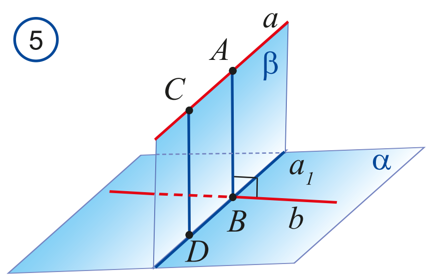
Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости называется расстояние от любой точки этой прямой до плоскости.

Расстояния от двух произвольных точек плоскости до параллельной плоскости равны. Расстоянием между параллельными плоскостями называется расстояние от любой точки плоскости до другой плоскости. Высота стола, изображенного на рис.4, равна расстоянию между плоскостями пола и стола.

Теорема 5.8. Две скрещивающиеся прямые имеют общий единственный перпендикуляр.

Доказательство. Пусть a и b – данные скрещивающиеся прямые (рис.5). Покажем, что в этих прямых можно выбрать такие точки A и B, где прямая AB перпендикулярна прямой и a и прямой b. Пусть плоскость α проходит через прямую b и параллельна прямой a. Возьмем на этой прямой точку C и от неё опустим перпендикуляр CD к плоскости α. Через пересекающиеся прямые a и CD проведем плоскость β. Пусть прямая a_1 – точка пересечения плоскости α и β.

5



Так как $a_1 \parallel a$, то прямые a_1 и b пересекаются в некоторой точке B. Через точку B опустим перпендикуляр BA к прямой a, лежащей в плоскости β.

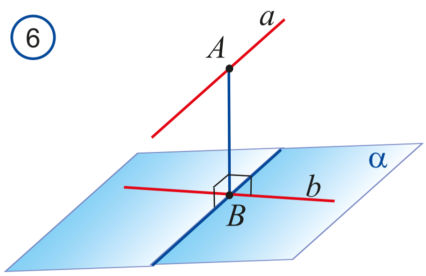
В результате обе прямые AB и CD лежат в плоскости β и перпендикулярны прямой a. Поэтому $AB \parallel CD$ и $AB \perp \alpha$.

Следовательно, $AB \perp a$ и $AB \perp b$. Прямая AB есть искомая прямая и она перпендикулярна каждой из скрещивающихся прямых a и b.

Докажите единственность общих перпендикуляров. ❑

Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.

Из вышеприведенной теоремы имеем следующий вывод:



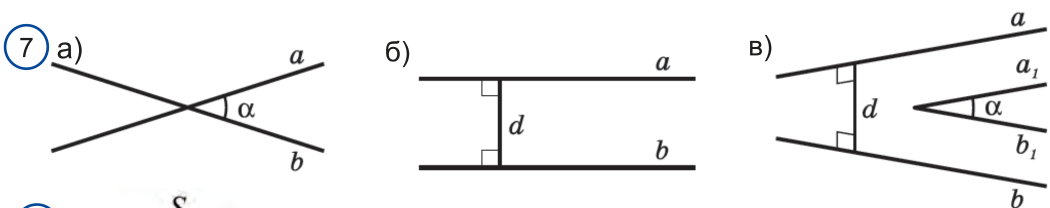
Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми a и b (рис.6) равно расстоянию от любой точки прямой a до плоскости α, параллельной прямой a, в которой лежит прямая b.

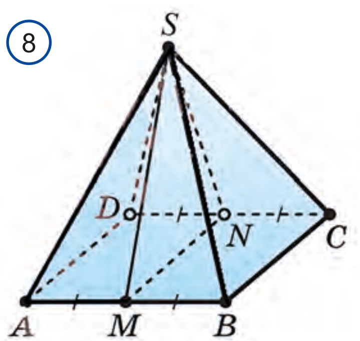
Теперь, основываясь на вышеприведенном, можем численно описать взаимное расположение двух прямых в пространстве.

Взаимное расположение двух прямых в пространстве описывают численно:

- если взаимно пересекаются, то угол α между ними (рис.7а),
- если взаимно параллельны, то расстояние между ними (рис.7б),
- если взаимно скрещивающиеся, то угол α между ними и расстояние d между ними (рис.7в).

Задача. У четырехугольной пирамиды $SABCD$ все ребра равны a. Найдите расстояние между её ребрами AB и SC (рис.8).





Решение. По теореме 4.8 в ребрах AB и SC существуют такие точки X и Y, что прямая XY перпендикулярна обоим ребрам AB и SC. Прямая XY также перпендикулярна плоскости, на которой лежит прямая SC, параллельная прямой AB.

Допустим, что плоскость α проходит через точку S и перпендикулярна прямой AB. Эта плоскость проходит через точки M и N середины ребер AB и CD. Тогда $XY \| \alpha$ и проекция отрезка XY в плоскость α равна отрезку XY.

Теперь определим точки проектирования точек X и Y на плоскость α.

Так как $AB \perp \alpha$, то все точки ребра AB проектируются в точку M. Следовательно, и точка X проектируется в точку M.

Так как точки S и C проектируются, соответственно в точки S и N, то отрезок SC проектируется в отрезок SN. Поскольку прямая SN лежит в плоскости, параллельной прямой AB, искомой проекцией отрезка XY является перпендикуляр, опущенный из точки M к прямой SN.

Длину этого перпендикуляра d найдем, используя площадь равнобедренного треугольника SMN с основанием, равным a и боковой стороной, равной $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

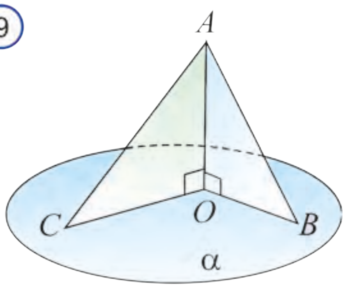
С одной стороны, площадь этого треугольника равна $\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}$, а с другой равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} d$. Из этих равенств: $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

? Вопросы к теме и упражнения

1. *Дайте определение перпендикуляра и наклонной к плоскости.*
2. *Что называется проекцией наклонной к плоскости?*
3. *Как определяется расстояние от точки до плоскости?*
4. *Как определяется расстояние между прямой, параллельной плоскости и плоскостью?*
5. *Как определяется расстояние между двумя параллельными прямыми?*
6. *Как определяется расстояние между двумя скрещивающимися прямыми?*
7. *Какие численные величины определяют взаимное расположение двух прямых в пространстве?*

5.15. Точки A, B, Q принадлежат плоскости α, а точка M ей не принадлежит и $MQ \perp \alpha$. Определите, какие из отрезков MA, AQ, MQ, BQ, MB являются: а) перпендикуляром; б) наклонной; в) проекцией наклонной.

9



5.16. Из точки A проведены к плоскости α две наклонные AB и AC, также перпендикуляр AO (рис.9). Сравните проекции наклонных, если $AB = 2{,}5$ см, $AC = 3$ см.

5.17. Из точки A проведены две наклонные (рис.9). Найдите длину этих наклонных, если длина одной из наклонных больше на 26 см, чем вторая, а длины проекций 12 см и 40 см.

5.18. Из центра окружности, описанной к треугольнику, проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Каждая точка этой прямой лежит от вершины треугольника на одинаковом расстоянии. Докажите.

5.19. К плоскости квадрата $ABCD$ площадью: а) 21 см^2; б) 96 см^2; в) 44 см^2; г) 69 см^2; д) 156 см^2 опущен перпендикуляр DM длиной 10 см. Найдите длину наклонной MA.

5.20. Через вершину острого угла прямоугольного треугольника *ABC* с прямым углом *C* проведена прямая *AD*, перпендикулярная плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки *D* до вершин *B* и *C*, если $AC = c$, $BC = b$ и $AD = c$.

5.21. Верхние концы двух вертикально стоящих столбов, удаленных на расстоянии 3, 4 м, соединены перекладиной. Высота одного столба 5,8м, а другого 3,9м. Найдите длину перекладины.

5.22. Телефонный провод длиной 15 м протянут от телефонного столба, где он прикреплен на высоте 8 м от поверхности земли к дому, где он прикреплен на высоте 20 м. Найдите расстояние между домом и столбом, считая, что провод не провисает.

5.23. Длина перпендикуляра *PQ*, опущенного к плоскости из точки *P*, равна 1, а длины наклонных *PA* и *PB* равны 2. Точка *C* середина отрезка *AB*. Найдите длину отрезка *QC*, если а) $\angle APB = 90^0$; б) $\angle APB = \beta$.

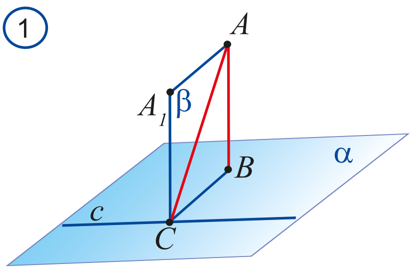
5.24. Из вершины *B* тупого угла параллелограмма *ABCD* восставлен отрезок *BH*, перпендикулярно к его плоскости. Найдите стороны параллелограмма, если $AH = 5$ см, $HD = HC = = 8{,}5$ см, $AC = 1{,}5\sqrt{33}$.

5.25. Точка *M* находится на расстоянии 40 см от каждой вершины правильного треугольника *ABC* со стороной 60 см. Найдите расстояние от плоскости треугольника *ABC* до точки *M*.

17 ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

Теорема 5.9. Если прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной, перпендикулярна её проекции на эту плоскость, то она перпендикулярна и самой наклонной.

1



Доказательство. Пусть отрезок *AB* перпендикуляр, опущенный к плоскости α, а *AC* – наклонная. Пусть прямая *c*, лежащая в плоскости α, проходящая через точку *C* и перпендикулярна к проекции наклонной (рис.1). Проведем прямую A_1C параллельно *AB*. Эта прямая перпендикулярна плоскости α.

Через прямые *AB* и AC_1 проведем плоскость β. Прямая *c* перпендикулярна прямой CA_1. Она по условию, перпендикулярна и прямой *CB*. Тогда прямая *c* перпендикулярна к плоскости β.

Следовательно, прямая *c* перпендикулярна и наклонной *AC*, лежащей в плоскости β. ❑

Так как в теореме речь идет о трех перпендикулярах, она получила название «теорема о трех перпендикулярах». Справедлива и теорема, обратная ей. Докажите её самостоятельно.

Теорема 5.10. Если прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной, перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и её проекции.

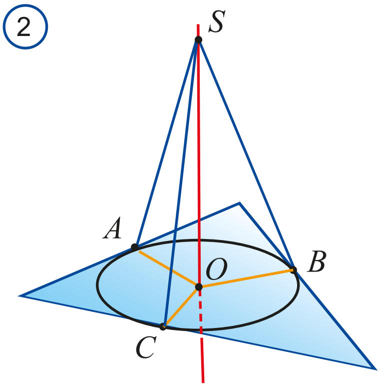
Задача 1. Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника (рис.2). Докажите, что произвольная точка этой прямой равноудалена от сторон треугольника.

Решение. Пусть A,B,C – точки касания сторон треугольника с окружностью, O – центр окружности и S произвольная точка на перпендикуляре.

Так как радиус OA перпендикулярен стороне треугольника, то по теореме о трех перпендикулярах, OA есть перпендикуляр к этой стороне. Тогда SAO есть прямоугольный треугольник. По теореме Пифагора,

$SA = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{r^2 + OS^2}$, где r – радиус вписанной окружности.

2

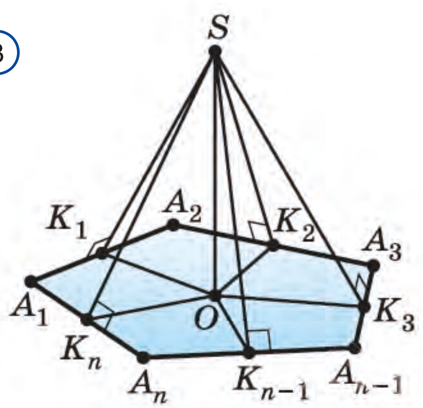


Точно так же, из прямоугольного треугольника SBO найдем. $SB = \sqrt{r^2 + OS^2}$ а из прямоугольного треугольника SCO найдем $SC = \sqrt{r^2 + OS^2}$.

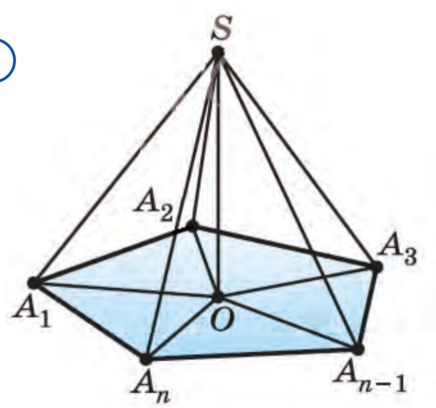
Следовательно, $SA = SB = SC$. ❑

На основе рисунков 3 и 4 приведем более общие случаи, подобные задаче 1 для произвольного многоугольника (для самостоятельного доказательства).

3



4

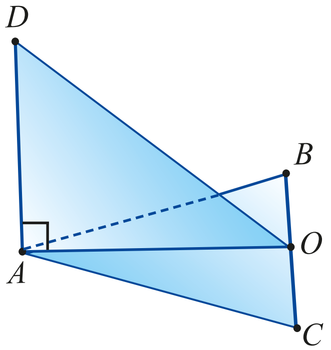


Задача 2. Точка в пространстве равноудалена от сторон многоугольника и от нее опущен перпендикуляр к плоскости многоугольника. Докажите, что основание этого перпендикуляра совпадает с центром окружности, вписанной в плоскость многоугольника (рис.3).

Задача 3. Точка в пространстве равноудалена от сторон многоугольника и от нее опущен перпендикуляр к плоскости многоугольника. Докажите, что основание этого перпендикуляра совпадает с центром окружности, вписанной в многоугольник (рис.4).

Задача 4. В плоскость треугольника ABC от его вершины A проведен перпендикуляр (рис.5). Найдите расстояние от точки D до прямой BC, если $AB = 13$, $BC = 20$, $AC = 11$ и $AD = 36$.

5



Решение. Искомое расстояние равно длине перпендикуляра, опущенного из точки D к стороне BC. Для того чтобы опустить этот перпендикуляр, надо найти его основание в стороне BC. Для этого опустим из вершины A треугольника ABC высоту AO в сторону BC: $AO \perp BC$.

Тогда по теореме о трех перпендикулярах, $BC \perp DO$. Следовательно, DO – искомый отрезок.

Теперь найдем длину отрезка DO. Сначала найдем площадь треугольника ABC по формуле Герона:

$p = (a + b + c) : 2 = (20 + 11 + 13) : 2 = 22;$

$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} = \sqrt{22 \cdot (22-20) \cdot (22-11) \cdot (22-13)} = 66.$

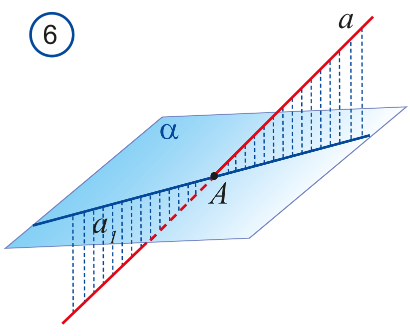
$DO = 2\,S / a = (2 \cdot 66) : 20 = 6{,}6.$

В прямом треугольнике ADO по теореме Пифагора

$DO = \sqrt{AD^2 + AO^2} = \sqrt{36^2 + 6{,}6^2} = 36{,}6.$

Допустим, что дана плоскость α и прямая a, пересекающая эту плоскость, но не перпендикулярная ей (рис.6). Из каждой точки прямой a опустим перпендикуляры к этой плоскости. Основания этих перпендикуляров образуют прямую a_1.

6

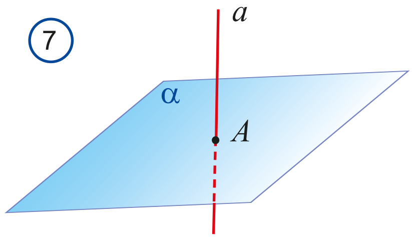


Прямая a_1 называется *проекцией* прямой a в плоскости α.

Углом между прямой a и плоскостью α называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

Если прямая перпендикулярна плоскости (рис.7) то угол между ней и плоскостью равен 90°, если она параллельна плоскости, то угол между ними принимается равным 0°.

7



Вопросы к теме и упражнения

1. *Опишите теорему о трех перпендикулярах. Почему она так названа?*
2. *Сформулируйте теорему, обратную теореме о трех перпендикулярах и прокомментируйте.*
3. *Как определяется угол между прямой и плоскостью?*
4. *Сколько градусов угол между плоскостью и прямой, перпендикулярной ей?*

5.26. Точка A лежит на расстоянии a от вершин равностороннего треугольника. Найдите расстояние от точки A до плоскости треугольника.

5.27. От точки S вне плоскости α проведены три равные наклонные SA, SB, SC и перпендикуляр SO. Докажите, что основание O перпендикуляра является центром описанной окружности около треугольника ABC.

5.28. Стороны равностороннего треугольника равны 3 м. Найдите расстояние до плоскости треугольника от точки, которая находится на расстоянии 2 м от каждой из его вершин.

5.29. В равнобедренном треугольнике основание и высота равны 4 м. Данная точка находится на расстоянии в 6 м от плоскости треугольника и на равном расстоянии от его вершин. Найдите это расстояние.

5.30. Расстояние от точки A до вершин квадрата равно a. Найдите расстояние от точки A до плоскости квадрата, если сторона квадрата равна b.

5.31. Найдите геометрическое место оснований наклонных данной длины, проведенных из данной точки до плоскости.

5.32. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 10 см и 17 см. Разность проекций этих наклонных равна 9 см. Найдите проекции наклонных.

5.33. Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длину наклонных, если: 1) одна из них на 26 см больше другой; 2) наклонные относятся к 1:2, а проекции наклонных равны 1 см и 7 см.

5.34. Из точки A, лежащей на расстоянии d от плоскости α проведены к этой плоскости наклонные AB и AC под углом 30°. Их проекции на плоскость α образуют угол 120°. Найдите длину отрезка BC.

5.35. Если один из катетов прямоугольного треугольника принадлежит к плоскости, а второй составляет с ней угол 45°, то докажите, что гипотенуза составляет с плоскостью угол 30°.

5.36. Наклонная a с плоскостью α образует угол 45°, а прямая b в плоскости образует с проекцией наклонной угол 45°. Угол между прямыми a и b равен 30°. Докажите.

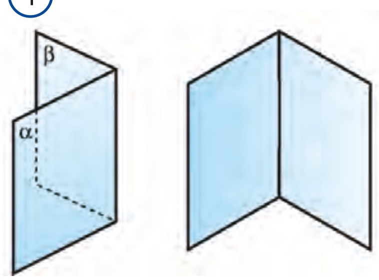
5.37. Точка P лежит на расстоянии a от каждой вершины квадрата $ABCD$, сторона которого равна a. Найдите угол n между плоскости квадрата и прямой AP.

5.38. Все ребра прямоугольной пирамиды взаимно равны. Найдите угол между ребром и гранью, которой не принадлежит данное ребро.

5.39. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны a, b и c. Найдите расстояние между диагональю параллелепипеда и диагоналями его боковых граней.

18 ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

1



Двугранным углом называется геометрическая фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a. (рис.1) Полуплоскости называются *гранями* двугранного угла, а прямая a, их ограничивающая, называется *ребром* двугранного угла.

Представление о двугранном угле дают предметы из обыденной жизни (рис.2): книга, ноутбук, полураскрытая дверь, двускатные крыши зданий и т.д.

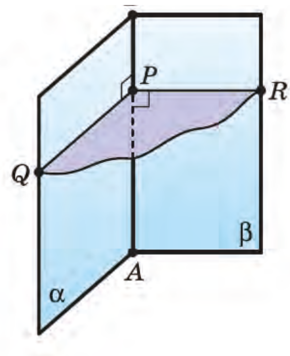
Из произвольной точки ребра двугранного угла в каждой грани проведем луч перпендикулярно к ребру. Образованный этими лучами угол называется *линейным углом* двугранного угла (рис.3).

Как видно из определения, линейный угол двугранного угла определяется точкой, выбранной на ребре и, очевидно, что двугранный угол имеет бесконечное множество линейных углов. Хотя это так, но величина линейного двугранного угла не зависит от выбранной точки, т.е. все они равны друг другу.

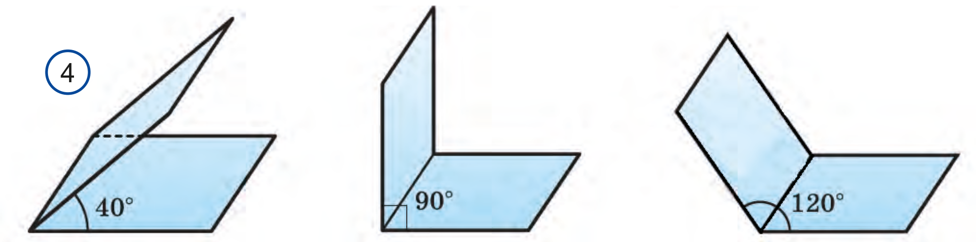
Величина двугранного угла определяется величиной его линейного угла. В зависимости от линейных углов острых, прямых, тупых и развернутых, двугранные углы разделяются на острые, прямые, тупые и развернутые двугранные углы. На рис. 4 изображены разные двугранные углы.

2

3

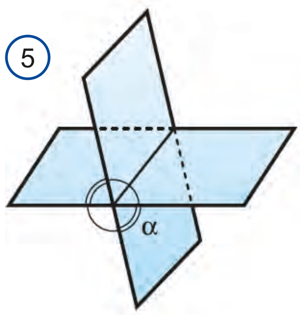


4



Две пересекающиеся плоскости разделяют пространство на четыре двугранных угла с общим его ребром (рис.5). Если один из этих двугранных углов равен α, то величина одного из этих углов тоже равна α. А величина остальных двух равна $180° - \alpha$.

5

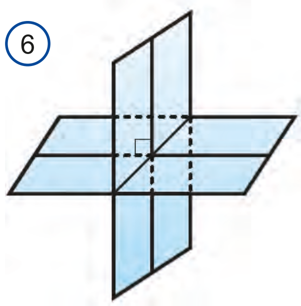


Среди этих двугранных углов имеется еще угол, величина которого меньше 90°. Величина этого угла принимается за *угол между пересекающимися плоскостями*.

Если один из двугранных углов прямой угол, т.е. равен 90°, то остальные три тоже являются прямыми углами (рис.6).

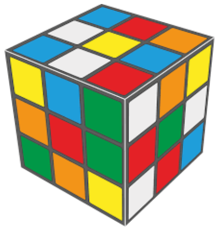
Плоскости, пересекающиеся под прямыми углами, называются *перпендикулярными плоскостями*.

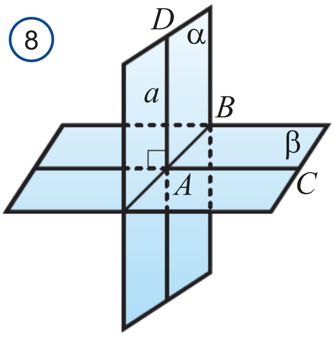
6



В качестве примера перпендикулярных плоскостей из окружающей среды можно привести полы и стены комнаты, стен с общим ребром, кубик Рубика, плоскость земли и стен дома, а также стен дома, соприкасающихся друг с другом (рис.8).

Перпендикулярность плоскостей α va β как в случае прямых обозначается с помощью знака "$\perp$" так: $\alpha \perp \beta$.



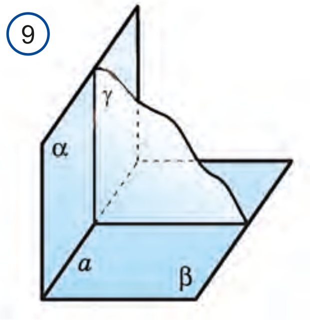


Теперь остановимся на свойства перпендикулярных плоскостей. Следующая теорема называется *признаком перпендикулярных плоскостей*.

Теорема 5.11. Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Доказательство. Рассмотрим плоскости α и β, такие, что плоскость α проходит через прямую *a*, перпендикулярную к плоскости β. Пуст *A* точка пересечения плоскости β и прямой *a* (рис.8). Докажем, что $a \perp b$.

Плоскости α и β пересекаются по прямой *AB*. Тогда, $AB \perp a$, так как по условию $\beta \perp a$. Проведем прямую *AC*, лежащую в плоскости β и перпендикулярную к прямой *AB*. Полученный угол *DAC* является линейным углом двугранного угла α β. По условию $a \perp \beta$. Тогда, *DAC* прямой угол. Следовательно, $\alpha \perp \beta$. ❑



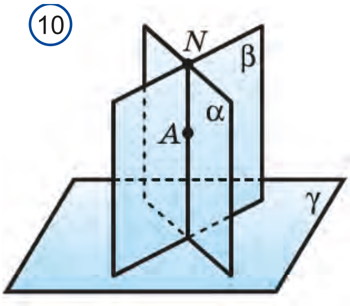
Из этой теоремы вытекает следствие.

Следствие. Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей (рис.9).

Справедлива и теорема, обратная теореме 5.11 приведём её без доказательства.

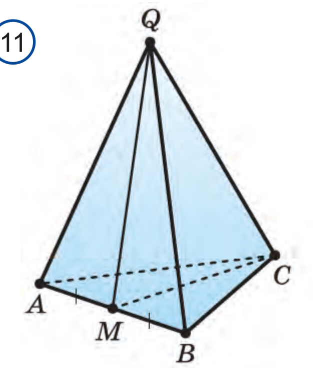
Теорема 5.12. Если через какую-нибудь точку одной из двух перпендикулярных плоскостей провести прямую, перпендикулярную к второй плоскости, то эта прямая лежит в первой плоскости.

Следствие. Если две плоскости перпендикулярны третьей плоскости, то прямая, их пересечения тоже перпендикулярна этой плоскости (рис.10).



Задача 1. Если точка M правильной пирамиды $QABC$ является серединой ребра ее основания (рис.11), то докажите, что плоскость QCM перпендикулярна к плоскости основания ABC.

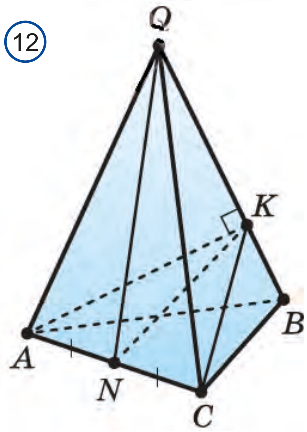
11



Доказательство. Так как отрезок AB основание равнобедренных треугольников AQB и ACB, то он перпендикулярен и к медианам QM и CM этих треугольников. Отрезок AB перпендикулярен и плоскости QCM. Тогда по теореме 5.12-плоскость ABC перпендикулярна плоскости QCM. ❑

Задача 2. Плоский угол AQB при вершине правильной пирамиды $QABC$ равен α. Найдите двугранный угол в ее боковом ребре (рис.12).

12



Решение. Пусть, точка N середина ребра AC, а AK перпендикуляр, проведенный через точку A к ребру BQ.

Из равенства треугольников ABQ и CBQ имеем $CK \perp BQ$. Поэтому угол AKC является линейным углом двугранного угла BQ.

Из прямоугольных треугольников AKQ и ANQ имеем:

$AK = \sin\alpha$, $AN = AQ \sin(\alpha/2)$.

Из прямоугольного треугольника AKN имеем: $\left(\frac{\angle AKC}{2}\right) = \frac{AN}{AK} = \frac{1}{2\cos(\alpha/2)}$.

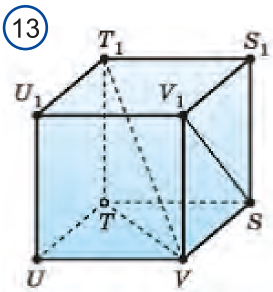
Отсюда, $\angle AKC = 2 \arcsin \frac{1}{2\cos(\alpha/2)}$. ❑

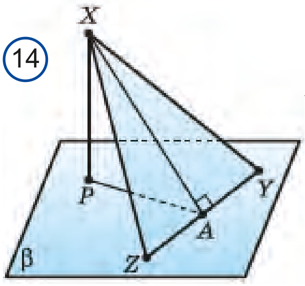
Вопросы к теме и задания

1. *Что называется двугранным углом?*
2. *Какой угол называется углом между двумя прямыми?*
3. *Как называются плоскости, пересекающиеся под прямым углом?*
4. *Сформулируйте признак перпендикулярности плоскостей.*
5. *Сформулируйте свойства перпендикулярных плоскостей и опишите.*

5.40. а) Определите перпендикулярные грани и назовите прямые двугранные углы: а) прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$; б) правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$.

5.41. Дан куб $STUVS_1T_1U_1V_1$ (рис.13). Является ли линейным углом двугранного угла T_1CVT: а) угол TVT_1; б) угол T_1ST. Найдите значение (величину) двугранного угла V_1UTS.





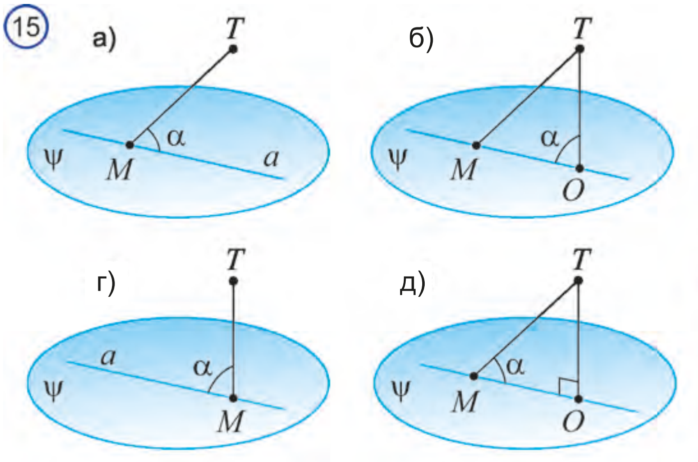
5.42. Даны два двугранных угла, у которых одна грань общая, а две другие грани являются различными полуплоскостями одной плоскости. Докажите, что сумма этих двухгранных углов равна $180°$.

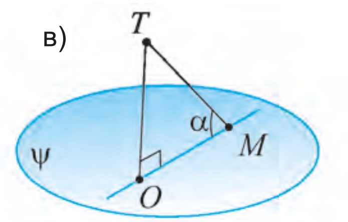
5.43. Сторона YZ треугольника XYZ лежит в плоскости β. Из ее вершины X опущены высота XA и перпендикуляр XP к плоскости β (рис.14). Докажите, что угол XAP линейный угол двугранного угла $XYZP$.

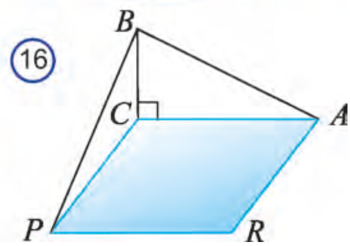
5.44. Ребро CD треугольной пирамиды $ABCD$ перпендикулярно к плоскости ABC. Найдите двугранные углы $DACB$, $DABC$, $BDCA$, если $AB = BC = AC = 6$ и $BD = 3\sqrt{7}$.

5.45. Из точки T опущена наклонная в плоскость ψ (рис.15).

На каких рисунках верно обозначен угол α между плоскостью и наклонной?

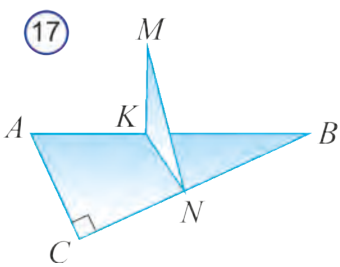






5.46. В треугольной пирамиде $ABCD$ углы DAB, DAC, ACB прямые и $AC = CB = 5$ va $DB = 5\sqrt{5}$. Найдите двугранный угол $ABCD$.

5.47. Плоскость линейного угла двугранного угла перпендикулярна каждой грани этого угла. Докажите.

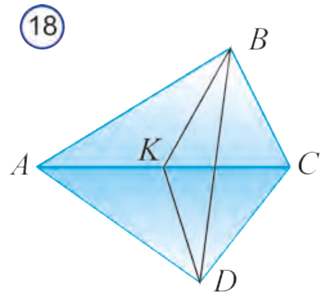


5.48. Две точки, лежащие в одной грани двугранного угла, находятся от ее ребра на расстоянии соответственно 51 см и 34 см. Известно, что первая из этих точек находится на расстоянии 15 см от другой грани. Найдите расстояние от этой грани до второй точки.

5.49. Плоскости прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) и квадрата $ACPR$ взаимно перпендикулярны (рис.16). Сторона квадрата 6 см, гипотенуза треугольника 10 см. Найдите длину отрезка BP.

5.50. Отрезок MK перпендикулярен плоскости прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$). Найдите длину отрезка MN, если $KN \| AC$, $AK = KB$, $AC = 12$ см, $MK = 8$ см (рис.17).

18



5.51. Плоскости равнобедренных треугольников ABC и ADC перпендикулярны (рис.18). AC – их общее основание. Отрезок AC медиана треугольника ABC. Найдите длину отрезка BD, если

$BK = 8$ см, $DK = 15$ см.

19 ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ И ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ТЕХНИКЕ

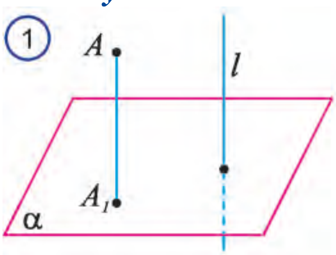
Если направление проектирования l перпендикулярно плоскости проектирования α, то такое параллельное проектирование называется *ортогональным проектированием*.

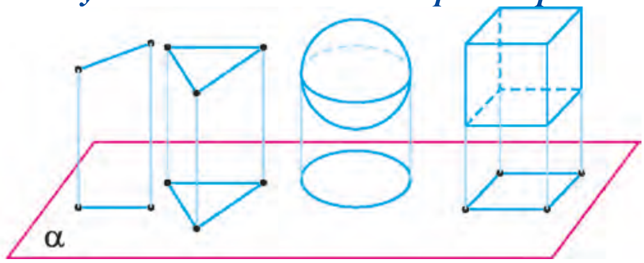
Фигура, полученная при ортогональном проектировании, называется *ортогональной проекцией* заданной фигуры или сокращенно *проекцией.*

Все свойства параллельного проектирования справедливы и при ортогональном проектировании. Ниже докажем только важное свойство, относящееся только ортогональному проектированию.

Теорема 5.13. Площадь ортогональной проекции многоугольника к плоскости равна произведению площади многоугольника на косинус угла между плоскостью этого многоугольника и плоскостью проектирования.

1

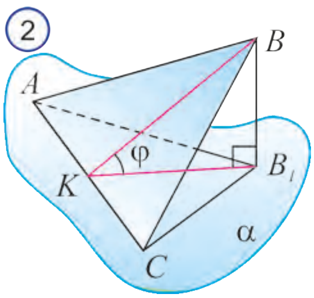




Доказательство. 1) Вначале рассмотрим случай треугольника и его проекцию на плоскость, проходящую через его некоторую сторону.

Пусть проекция треугольника ABC на плоскости α есть треугольник AB_1C.

Опустим высоту BK треугольника ABC. По теореме о трех перпендикулярах, отрезок B_1K высота треугольника KBB_1(рис.2). Угол



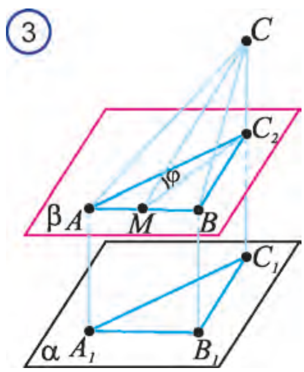
BKB_1 есть угол φ и между плоскостью треугольника и плоскостью проектирования. В треугольнике BKB_1 $KB_1 = KB \cdot \cos\varphi$.

Тогда, $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot KB$, $S_{AB_1C} = \frac{1}{2} AC \cdot KB_1$.

Отсюда получим, $S_{AB_1C} = S_{ABC} \cdot \cos\varphi$. Теорема в случае 1 доказана.

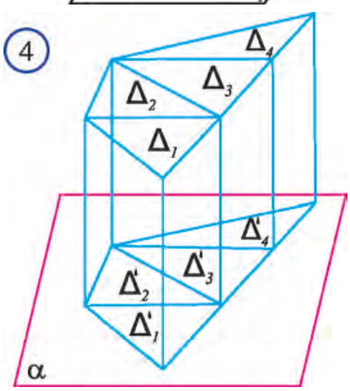
2) Теорема остается верной и при рассмотрении вместо плоскости α другуой плоскости β, параллельной ей (рис.3). Она доказывается с помощью свойства параллельного проектирования.

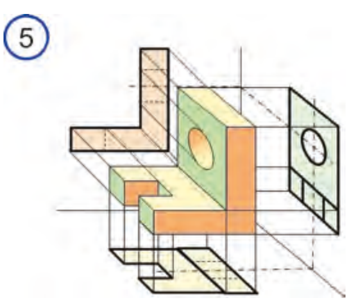
3) Теперь, если рассмотреть общий случай многоугольника (рис.4), то теорема в этом случае доказывается делением многоугольника на треугольники с помощью его диагоналей для приведения его на случай, рассмотренный выше.❑



Ортогональная проекция используется в техническом черчении при проектировании разных деталей. Чертежи разных деталей машин получаются путем ортогонального проектирования на одну, две или три взаимно перпендикулярные плоскости.

Эти проекции в зависимости от направления проектирования называются также вертикальными, горизонтальными и фронтальными проекциями





? *Вопросы к теме и упражнения*

1. Что называется ортогональным проектированием?

2. Перечислите свойства ортогонального проектирования.

3. Как применяется ортогональное проектирование в черчении?

4. Сформулируйте свойство плоскости, перпендикулярной одной прямой.

5. В чем сущность обобщенной теоремы Пифагора?

6. Будут ли взаимно параллельными две прямые, перпендикулярные третьей плоскости?

7. Будут ли взаимно параллельными плоскость и прямая, перпендикулярные второй плоскости?

8. Сколько плоскостей можно провести через заданную прямую перпендикулярна к заданной плоскости?

9. Плоскость α перпендикулярна плоскости β; всякая ли прямая плоскости α перпендикулярна плоскости β?

10. Плоскость, проходящая через наклонную к другой плоскости, перпендикулярна ли этой плоскости?

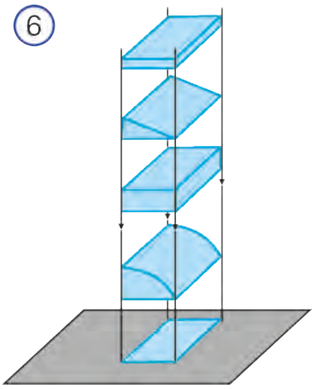
11. Перпендикулярны ли пересекающиеся грани прямоугольного параллелепипеда?

5.52. Будет ли ортогональная проекция трапеции: а) квадратом; б) отрезком; в) прямоугольником; г) параллелограммом; д) трапецией?

5.53. По рис.6 определите геометрические фигуры, ортогональная проекция которых прямоугольник.

5.54. Отрезок A_1B_1 ортогональная проекция отрезка AB к плоскости α (рис.7). Если $AB = 20$ см, $AC = 10$ см, $A_1B_1 = 12$ см, то найдите длину отрезка B_1C_1.

6

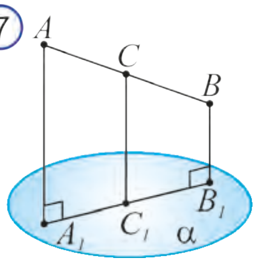


5.55. Ортогональная проекция отрезка AB длиной 5 см к плоскости ω является отрезок AC длиной 3 см (рис.8). Найдите косинус угла наклона отрезка AB к плоскости ω.

5.56. Расстояние от прямой AB до точки (рис.9) C в два раза больше расстояния от точки C до плоскости ABD. Найдите угол между плоскостями ABC и ABD.

5.57. Площадь треугольника ABC равна 18 см². $KC \perp (ABC)$. Если угол между плоскостями треугольников ABK и ABC: а) $\alpha = 30°$; б) $\alpha = 45°$; в) $\alpha = 60°$, то найдите площадь треугольника ABK (рис.10).

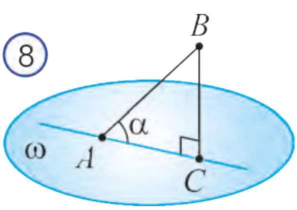
7



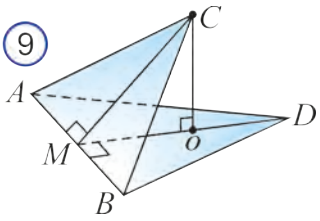
5.58. Угол между плоскостями треугольников ABC и ABD равен $60°$. Найдите расстояние CD, если $AB = 4\sqrt{3}$.

5.59. Ортогональной проекцей треугольника с площадью 48 см² является треугольник со сторонами 14 см, 16 см и 6 см. Вычислите угол между плоскостью треугольника и его проекцией.

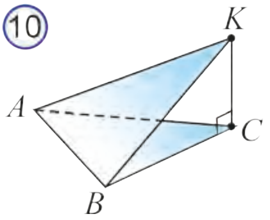
8



9



10



5.60. Ортогональной проекцией треугольника с площадью, равной 12 см^2 является треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Вычислите угол между плоскостью треугольника и его проекцией.

20 ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ

Применение и формирования практических компетенций

1. Как можно проверить с помощью измерений перпендикулярности линии соединения стен двух соседних комнат?

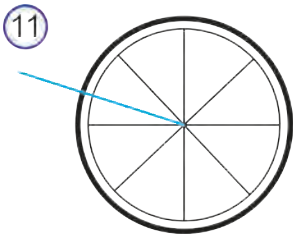
2. Как можно проверить вертикальность столба с помощью измерительного прибора – рулетки?

3. Как проверить перпендикулярность оси колеса к плоскости его вращения (движения)?

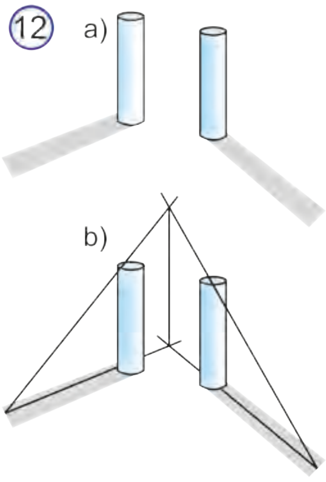
4. Почему зимой сосульки, висящие с крыши, можно считать взаимно параллельными, не учитывая их толщины?

5. Ученик выполняет практическую работу. Для проверки вертикальности установленных нескольких столбов по отношению к плоскости земли, он проверил только один столб. Вертикальность остальных столбов проверил следующим образом: измерив высоту каждого столба и расстояние между вершинами столбов, он принял решение. Правильно ли он выполнил эту работу?

11



12

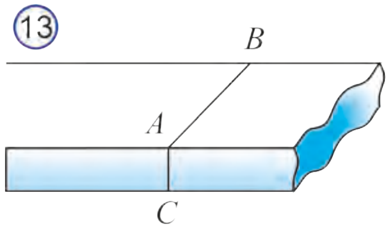


6. По какой причине дверь каждый раз при открытии и закрытии перпендикулярна по отношению к полу?

7. Как яркий пример перпендикулярности прямой к плоскости можно привести расположение плоскости, в которой лежат спицы колеса по отношению к оси колеса (рис.11). Ось перпендикулярна каждой спице колеса. В процессе движения каждая из спиц образует круг, состоящий из отрезков при пересечении каждой спицы в одной точке. В какой плоскости вращается колесо, если ось расположена горизонтально? Почему?

Указание: колесо перпендикулярно плоскости перпендикулярной оси.

8. Выполняется упражнение по прыжкам в высоту. Для установления ограничительной балки используются куб с ребром 25 м и прямоугольной параллелепипед с измерениями 25х25х50. Как можно организовать упражнения по прыжкам в высоту: 1) 125 см; 2) 150 см; 3) 175 см?



9. На рис.12 изображены два вертикальных столба и их тень. Используя данные сведения, найдите точку установления источника света (лампу) и ее проекцию на горизонтальную плоскость. Ответьте также на следующие вопросы:

а) имеет ли значение вертикальность столбов?

б) имеет ли значение горизонтальность плоскости, на которую падает свет?

в) имеет ли значение горизонтальность плоскости падения света?

Решение. *На рисунке 12 приведены нужные построения. При нахождени места источника света направление столбов не имеет значения, но их вертикальность необходима.*

Если столбы вертикальны и свет падает на горизонтальную плоскость, то для решения задачи достаточно знание тени одного столба и направление тени, падающей со второго столба (рис.12б).

10. На круглый стол постелили скатерть квадратной формы со стороной, равной a. Центр круга совпадает с центром квадрата. Насколько близка вершина скатерти к полу, чем середины его сторон?

Ответ: $a(\sqrt{2}-1)/2 = 0{,}207\ a$.

11. Вертикальность стен проверяется с помощью отвеса (нить, с одной стороны которой подвешена гиря). Если нить отвеса чем ближе к стене, то приходим к решению, что вертикальность стены тем лучше. Насколько верно это решение? На чем основан этот способ проверки.

12. Как надо отметит линии распиления на поверхности деревяной доски (рис.13), чтобы обеспечит перпендикулярность поверхности распиления ко всем ребрам.

13. Как можно использовать теорему Пифагора для проверки перпендикулярности соседних стен комнаты?

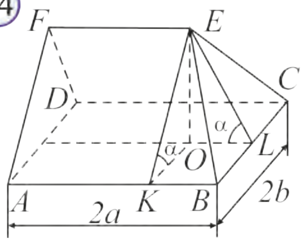
14. Для проверки вертикальности столб наблюдается из двух точек, не лежащих в основании на одной прямой. Обоснуйте этот способ проверки.

Указание. Воспользуйтесь признаком перпендикулярности прямой и плоскости.

15. На недоступной возвышенности установлен высокий столб. Как можно проверить его вертикальность?

Решение. Достаточно показать, что столб вместе с некоторой прямой лежит в одной плоскости и еще с другой вертикальной прямой лежит в другой плоскости. Установим отвес так, что когда верхние вершины нити

14



и столба, а также наши глаза расположатся в одной прямой так, чтобы нить отвеса и столб лежали тоже в одной прямой. Этот способ основан на следующем:1) вертикальный столб должен лежать в произвольной вертикальной прямой в одной плоскости; 2) если две параллельные прямые лежат в двух пересекающихся плоскостях, то эти прямые параллельны и линии пересечения этих плоскостей (параллельны).

16. Два плоских зеркала установлены вертикально. Горизонтальный луч, параллельный поверхности одного из зеркал, отражается из второго зеркала на поверхность первого зеркала по прямой, перпендикулярной этому зеркалу. Найдите угол между зеркалами.

Указание. Воспользуйтесь законом отражения света. *Ответ*: 45°.

17. Горизонтальный луч проходит и отражается в двух зеркалах, расположенных вертикально. Луч, первоначально параллельный поверхности первого зеркала, в результате двукратного отражения стал параллельным плоскости второго зеркала. Найдите угол между зеркалами.

Ответ: 60°.

18. Стальная платформа квадратной формы толщиной 5 м и площадью 4 м^2 подвешена с четырех вершин тросом. Длина каждого троса 2 м. Найдите угол наклона тросов по отношению к платформе. Можно ли на эту платформу разместить бак цилиндрической формы высотой 0,9 м и диаметром основания 0,6 м?

Ответ: 45°. *Можно разместить бак.*

19. Крыша, с которой дождевая вода стекает с четырех сторон, ортогонально проектирована на основание крыши. Докажите, что проекции ребер крыши являются биссектрисой угла основания, имеющего форму прямоугольника.

20. На дом, основание которого имеет форму прямоугольника $ABCD$ нужно установить крышу, с которой дождевая вода стекает с четырех сторон. $AB = 2a$ м, $BC = 2b$ м. Все грани крыши с плоскостью основания образуют угол α. Сколько нужно профнастили для покрытия крыши? При этом учтите, что профнастил в количестве k процентов поверхности крыши уходит при срезе.

Ответ: $4ab\,(1 + 0{,}01k) / \cos\alpha$.

21. При безветренной погоде идет дождь по косой наклонной. Как определить с помощью фанеры прямоугольной формы уклон дождя по отношению к плоскости горизонта? Начертите соответствующий чертеж.

Указание: Кусок фанеры надо установить так, чтобы его плоскость была приблизительно перпендикулярна траектории движения дождевых капель и плоскости, определенной ими проекции к горизонтальной плоскости. Тогда в горизонтальной плоскости образуется прямоугольник, на который не попадают капли дождя. Потом измеряется длина соответствующих отрезков и вычисляется тангенс угла между ними.

22. На детской кровати площадью S_1 и длиной n надо повесить две одинаковые занавески прямоугольной формы. Площадь каждой занавески равна S_2, а её длина равна длине кровати. Верхний край каждой занавески повешен на проволоку, протянутую параллельно краю кровати. Найдите высоту проволоки над кроватью. Решите задачу при следующих численных условиях: $n = 1$ м 20 см, $S_1 = 6000$ см^2, $S_2 = 7800$ см^2. Начертите соответствующий чертеж. *Указание*: $\sqrt{4S_2^2 - S_1^2} / 2n$.

Ответ: 0,5 м.

23. На дом с оснаванием прямоугольника $ABCD$ нужно установить крышу, стекающей дождевой воды с четырёх сторон (рис.8). AB= 18 м, BC= 12 м. Все грани крыши образуют с основанием крыши угол 40°. Сколько штук черепицы необходимо, если для покрытия поверхности 1 м^2 нужно 15 штук черепицы?

24. С помощью шестигранного карандаша и раскрытой книги покажите примеры углов между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями.

25. С крыши, имеющей две оси симметрии, изображенной на рис.14, покажите направление стекания дождевой воды.

26. Какие измерения надо проводить для измерения высоты минарета с недоступным основанием?

27. Какие измерения надо проводить для нахождения расстояния до дома с известной высотой, если подойти к нему невозможно?

28. Почему тени исчезают в полдень?

29. Как можно измерить высоту дерева, не поднимаясь на него?

Ответы и указания

4.5. a) 7 см; b) 30 см. **4.6.** b) 200 мм. **4.13.** 50 см. **4.14.** 40 мм. **4.21.** $a + b$. **4.22.** a) 40°; b) 45°; c) 90°. **4.23.** a)58°; b) 47°. **4.51.** 32 см. **4.52.** 6 см. **4.53.** 20 см.

5.11. 1) 6,5 см; 2) 15 см; 3) $\sqrt{2a^2 - b^2 + d^2}$; 3) $\sqrt{2a^2 - c^2 + 2d^2}$. **5.12.** 2 м. **5.17.** 15 см и 41 см. **5.20.** $BD = \sqrt{2a^2 + b^2 + c^2}$; $CD = \sqrt{a^2 + c^2}$. **5.21.** 3,9 м. **5.22.** 9 м. **5.23.** a) $\sqrt{2}/2$; b) $\sqrt{(5 + 3\cos\beta)/2}$. **5.24.** 3 см; 7,5 см. **5.25.** 20 см. **5.34.** $3d$. **5.37.** 45°. **5.38.** $\arccos\sqrt{3}/3$. **5.44.** 90°. **5.46.** 60°.

М.А.Мирзаахмедов, Б.К.Хайдаров, Ш.Н.Исмаилов, А.К.Аманов

МАТЕМАТИКА
АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА
ГЕОМЕТРИЯ
ЧАСТЬ II

Учебник для учащихся 10 классов средних образовательных
учреждений и учащихся учреждений среднего
специального, профессионального образования

Переводчик	Хусанов У.
Редактор	Гаипов Н.
Художественный редактор	Убайдуллаев З.
Технический редактор	Мадияров К.
Компьютерный дизайн	Маликов Р.

Лиц. изд. AI № 296 22.05.2017.
Подписано в печати 25.01.2018. Формат 70х90 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Усл.-печ.л. 9,0. Печ.л . 8,56.
Тираж 00000 экз. Договор № 11-2017. Заказ № 11-685.
Оригинал-макет подготовлен в издательстве
ООО «Extremum-press» 100053., г.Ташкент, ул. Богишамол, 3.
Тел:234-44-05. E-mail: Extremum-press@mail.ru
Отпечатано в ИПТД «O‘qituvchi»
Агентства печати и информации Узбекистана
100206, Ташкент, улица Янгишахар, дом 1.