МАТЕМАТИКА 11

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА
ГЕОМЕТРИЯ
ЧАСТЬ II

Учебник для 11 классов средних
образовательных учреждений и
учреждений среднего специального,
профессионального образования

Утвержден Министерством народного образования
Республики Узбекистан

ТАШКЕНТ
2018

УДК: 51(075.32)
ББК: 22.1ya72
М 63

Авторы части "Алгебра и начала анализа"

Мирзаахмедов М. А., Исмаилов Ш. Н., Аманов А. К.

Автор части "Геометрия":

Хайдаров Б. К.

Рецензенты:

Бешимов Р. Б. – зав.кафедрой "Геометрия и топология" НУУ им. Мирзо Улугбека, доктор физико-математических наук.

Жуманиёзов К. С. – доцент кафедры "Методика преподавания математики" физико-математического факультета ТГПУ имени Низами, кандидат педагогических наук.

Розимов Р. О. – учитель математики школы №237 Сергелийского района;

Жуманиёзова С. Б. – методист РЦО.

Саибова И. Б. – учитель математики специализированной школы №307 Яшнабадского района.

Использованные в учебнике обозначения и пояснения к ним:

△	– Начало решения задачи	▲	– конец решения задачи
!	– задания контрольных работ и тестовые задания	?	– вопросы и задачи
■	– основная информация	*	– задачи повышенной трудности

Издано за счёт средств Республиканского целевого книжного фонда

ISBN: 978-9943-5127-7-1

47–50 ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Вычисление площадей при помощи интеграла

Задача. Найдите площадь S фигуры $ABCD$, изображённой на рис. 7а.

△ Заметим, что площадь S этой фигуры равна разности криволинейных трапеций $aBCb$ и $aADb$. Значит:

$$S=\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)dx=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx.\ (1)$$

Ответ: $S=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx.$ ▲

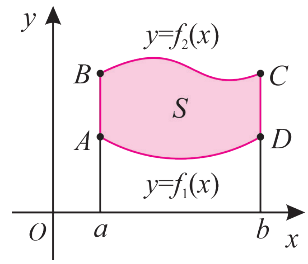


Рис. 7 а.

Формула (1) верна для непрерывных функций, удовлетворяющих условию $f_2(x)\geq f_1(x)$.

Пример 1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямой $y=x$ и параболой $y=x^2+2x-2$.

△ 1) Найдем точки пересечения прямой $y=x$ и параболы $y=x^2+2x-2$:

2) Из уравнения $x^2+2x-2=x$ получим $x_1=-2$, $x_2=1$.

Значит, прямая и парабола пересекаются в точках $(1; 1)$, $(-2; -2)$. Ясно, что на промежутке $(-2; 1)$ график функции $y=x$ лежит выше графика функции $y=x^2+2x-2$ (рис. 8).

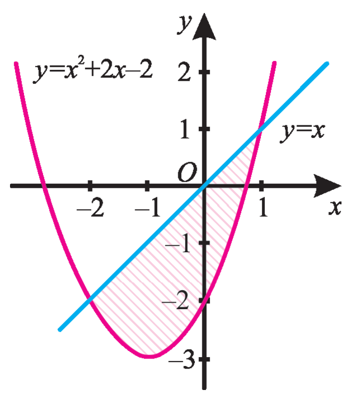


Рис. 8.

Положим, что в формуле (1) $a=-2$, $b=1$, $f_2(x)=x$, $f_1(x)=x^2+2x-2$. Тогда искомая площадь равна

$$S=\int_{-2}^{1}\left(x-(x^2+2x-2)\right)dx=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx=\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\frac{7}{6}-\left(-\frac{10}{3}\right)=4,5.$$

Ответ: $S=4{,}5$ (кв.ед.) ▲

Пример 2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\sqrt{x}$ и $y=x^2$.

△ На отрезке $x\in[0;1]$ $x^2\le\sqrt{x}$ (рис. 9).

Положим, что в формуле (1) $a=0$, $b=1$, $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=\sqrt{x}$.

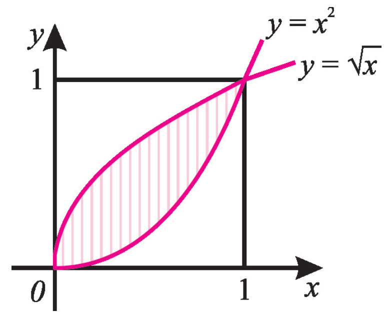


Рис. 9.

Тогда

$$S=\int_{0}^{1}(\sqrt{x}-x^2)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{0}^{1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\ \textit{кв.ед.}$$

Ответ: $S=\frac{1}{3}$ *кв.ед.* ▲

Вычисление объёмов тел вращения

Можно показать, что объём тела, образованный вращением криволинейной трапеции относительно оси *Ox*, вычисляется по формуле

$$V=\pi\cdot\int_{a}^{b}f^2(x)dx \qquad (2)$$

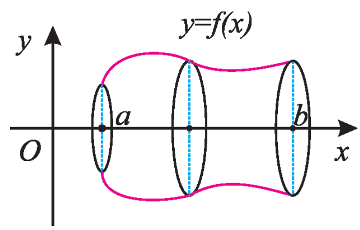


Рис 10.

В частности, за счёт выбора в данной формуле соответствующей функции $f(x)$ мы можем легко найти объёмы конуса, усеченного конуса, цилиндра, шара, шарового сегмента.

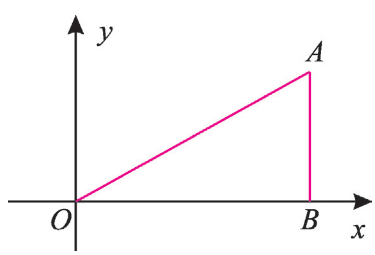


Рис 11.

Объём конуса. Пусть $AB=R$, $OB=H$. (рис. 11). Очевидно, что уравнение прямой *OA* имеет вид $y=\frac{R}{H}x$. Тогда согласно формуле (2)

$$V_{\text{конус}}=\pi\cdot\int_{0}^{H}\left(\frac{R}{H}x\right)^2dx=\pi\cdot\frac{R^2}{3H^2}\cdot x^3\Bigg|_{0}^{H}=\pi\cdot\frac{R^2}{3H^2}\cdot(H^3-0)=\frac{1}{3}\pi R^2H.$$

Значит, $V_{\text{конус}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Объём усечённого конуса. При вращении отрезка AB относительно оси Ox образуется усечённый конус. Пусть $AO=r$, $BD=R$, $OD=H$ (рис. 11).

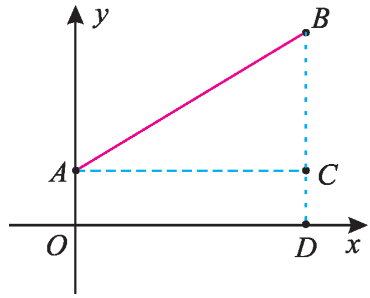


Рис. 12.

Ясно, что прямая AB имеет уравнение

$$y = \frac{R-r}{H}x + r.$$

Значит, $a=0$, $b=H$, $f(x) = \frac{R-r}{H}x + r$.

Тогда согласно формуле (2)

$$V_{\text{усеч.кон.}} = \pi \cdot \int_0^H \left(\frac{R-r}{H}x + r\right)^2 dx = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{H}{R-r} \cdot \left(\frac{R-r}{H}x + r\right)^3 \Bigg|_0^H = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{H}{R-r} \cdot (R^3 - r^3) = \frac{\pi}{3} \cdot H \cdot (R^2 + Rr + r^2).$$

Таким образом, объём усечённого конуса: $V = \frac{\pi}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2)H$.

Объём шара. Рассмотрим тело, образованное вращением четверти круга радиуса R с центром в точке $(R; 0)$ Это тело является полушарием (рис.13). Тогда уравнение соответствующей окружности имеет вид $(x-R)^2 + y^2 = R^2$, откуда получим $y = \sqrt{2Rx - x^2}$, $x \in [0; R]$. Согласно формуле (2):

$$\frac{1}{2}V_{\text{шар}} = \pi \cdot \int_0^R (2Rx - x^2)dx = \pi \cdot \left(Rx^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = \frac{2}{3}\pi R^3, \text{ значит, } V_{\text{шар}} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

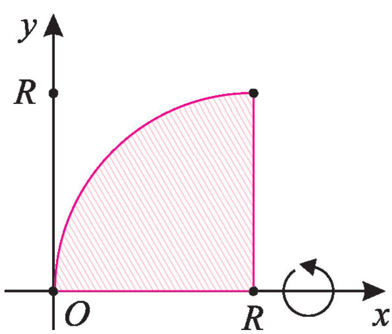


Рис. 13.

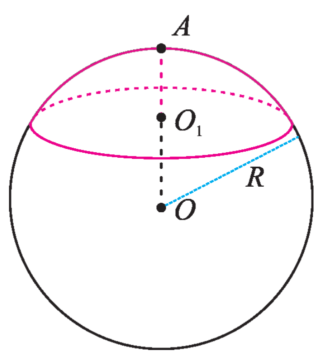


Рис. 14.

Объём шарового сегмента. На рис. 14 $OA=R$, $O_1A=H$ (высота шарового сегмента). Если мы будем вращать круговой сегмент вокруг высоты, то мы получим шаровой сегмент (рис. 14) Нахождение объёма шарового сегмента аналогично нахождению объёма шара, в этом случае интегрирование проводится по отрезку $[0; H]$:

$$V_{\text{сегмент}} = \pi \cdot \int_0^H (2Rx - x^2)dx = \pi \cdot (Rx^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_0^H = \pi \cdot (RH^2 - \frac{1}{3}H^3).$$

Значит, $V_{\text{сегмент}} = \frac{1}{3}\pi \cdot H^2 \cdot (3R - H)$.

Объём цилиндра. Тело, образованное вращением отрезка AB, параллельного оси Ox, является цилиндром.

Пусть $AB=OC=H$, $OA=BC=R$ (рис. 15). Очевидно, что уравнение прямой AB имеет вид, $y=R$, при $x \in [0; H]$. Тогда согласно формуле (2) имеем

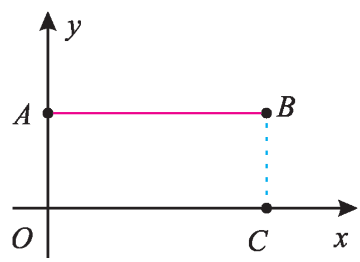


Рис. 15.

$$V_{\text{цилиндр}} = \pi \cdot \int_0^H R^2 dx = \pi R^2 x\Big|_0^H = \pi R^2 \cdot (H - 0) = \pi R^2 H.$$ Значит, $V_{\text{цилиндр}} = \pi R^2 \cdot H$.

Возникают естественные вопросы.

Почему мы рассматривали вращение вокруг оси Ox ?

А если вращение будет производиться относительно оси Oy?

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком непрерывной функции $y=f(x)$, а слева и справа вертикальными прямыми $x=a$ и $x=b$. Объём фигуры, образованной вращением этой криволинейной трапеции вокруг оси Oy, можно вычислить по формуле

$$V = 2\pi \cdot \int_a^b xf(x)dx \qquad (3)$$

Пример 1. Найдите объём конуса (рис. 16).

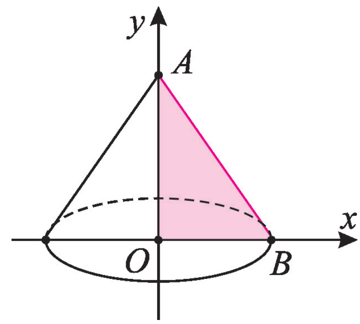


Рис. 16.

△ Пусть $OA=H$, $OB=R$. Очевидно, что уравнение прямой AB имеет вид $y = -\frac{H}{R}x + H$. В этом случае положим: в формуле (3) $a=0$, $b=R$, $f(x) = -\frac{H}{R}x + H$ и найдём объем конуса, образованного вращением отрезка AB вокруг оси Oy.

$$V_{\text{конус}} = 2\pi\cdot\int_0^R x\cdot\left(-\frac{H}{R}x+H\right)dx = 2\pi\left[-\frac{H}{R}\int_0^R x_2dx + H\int_0^R xdx\right] =$$

$$= 2\pi\cdot\left(-\frac{H}{R}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^R + H\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^R = -2\pi\cdot\frac{H}{R}\cdot\frac{R^3}{3} + 2\pi\cdot H\cdot\frac{R^2}{2} = \pi R^2H\cdot\left(-\frac{2}{3}+1\right) = \frac{1}{3}\pi R^2H.$$

Значит, $V_{\text{конус}} = \frac{1}{3}\pi R^2H.$ ▲

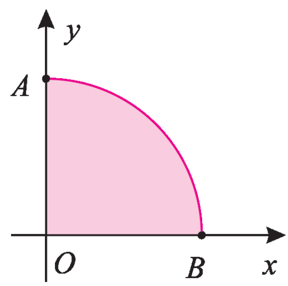


Рис. 17.

Пример 2. Найдите объём шара радиуса R.

△ Пусть $OA=OB=R$, O – центр окружности. Уравнение соответствующей окружности имеет вид, $x^2+y^2=R^2$, отсюда $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $0\le x\le R$.

Рассмотрим полушар, образованный вращением четверти соответствующего круга относительно оси Oy (рис.17). Найдём объём данного полушара. Для этого положим в формуле (3) $a=0$, $b=R$, $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$. Тогда $V = 2\pi\cdot\int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}dx.$

Пусть $R^2-x^2=u$, отсюда $xdx=-\frac{du}{2}$,

$$\int x\sqrt{R^2-x^2}dx = -\frac{1}{2}\cdot\int\sqrt{u}du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Здесь мы выбрали первообразную, соответствующую $C=0$.

Значит, $V = -\frac{2\pi}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R = \frac{2}{3}\pi R^3$, или $V_{\text{шар}} = \frac{4}{3}\pi R^3$. ▲

Вычисление работы силы.

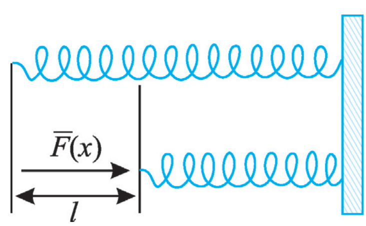


Рис. 18.

Рассмотрим винтообразную пружину, один конец которой жестко закреплен, а на второй конец действует сила $F=F(x)$, которая сжимает пружину (рис. 18). Согласно закону Гука, сжатие пружины пропорционально действующей силе $F(x)$. Найдите работу силы $F(x)$ которая была затрачена на сжатие пружины, равное l.

△ Известно, что работа переменной силы $F(x)$ на отрезке $[a, b]$ вычисляется по формуле

$$A = \int_a^b F(x)dx \qquad (4)$$

Обозначим через x величину сжатия, производимого силой $F(x)$. Тогда по закону Гука, $F(x)=k\cdot x$, здесь k – коэффициент сжатия. Из формулы (4) работа равна $A=\int\limits_0^l kxdx=k\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^l=\frac{kl^2}{2}$. ▲

В частности, пусть для сжатия пружины на 0,01 m была применена сила 10 H, то из равенства $F=10H=kx$ получим $k=\frac{F}{x}=1000$. Значит $F(x)=kx=1000\cdot x$. Тогда работа силы F, затраченная на сжатие равна

$$A=\int\limits_0^{0.09}1000xdx=1000\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,09}=500\cdot 0,0081=4,05\ (\text{Дж}).$$

Упражнения

51. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+4x$ и прямой, проходящей через точки (4;0) и (0;4) .

52. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)=2x-2$ и графиком её первообразной, удовлетворяющей условию $F(0)=1$.

Найдите площади фигур, ограниченных следующими кривыми. Постройте соответствующие рисунки по данным в **(53–54)**:

53. 1) $y=x^2,\ y=1-x^2;$ 2) $y=\frac{1}{x},\ y=0,\ x=1,\ x=4;$

3) $y=x^2-2x,\ y=4-x^2;$ 4) $y=\frac{1}{x},\ y=0,\ x=1,\ x=a(a>1).$

54. 1) $y=\frac{x^2}{3},\ y=4-\frac{2}{3}x^2;$ 2) $y=x^2,\ y=2x^2\ y=2;$

3) $y=x^2,\ y=\frac{x^2}{2},\ y=2x;$ 4) $y=\frac{1}{x},\ y=x^2,\ y=\frac{x^2}{2}.$

55. Найдите объём тела, образованного вращением графика функции $y=\sin x,\ x\in[0;\pi]$, вокруг оси Ox.

56. Найдите объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x},\ x=1,\ x=4$, вокруг оси Ox.

57. Скорость поезда, движущегося по наклонной, изменяется по закону $v(t)=15+0,2t$(м/сек). Найдите длину наклонной, если поезд прошёл его за 20 секунд.

58. Тело, брошенное вверх в момент времени $t=0$, имело начальную скорость 20 м/с. Движение тела происходит по закону $s(t)=20t-5t^2$ (м) Найдите высоту, на которую поднялось тело, когда его скорость равна 5 м/с?

59. Скорость торможения автомобиля изменяется по закону $v(t)=19-1{,}2\cdot t$. Известно, что полная остановка автомобиля случилась через 10 секунд после начала торможения. Найдите тормозной путь автомобиля.

60. Скорость материальной точки изменяется по закону $v(t)=3t+\dfrac{3}{2}\sqrt{t}$ Найдите путь, пройденный точкой в промежуток времени от $t=0$ до $t=4$.

61. Рассмотрим криволинейную фигуру, ограниченную сверху кривой $y=e^x$, снизу – осью Ox, слева – прямой $x=0$, справа – прямой $x=1$ Найдите объём тела, образованного вращением этой фигуры вокруг оси Oy.

62. Найдите площади фигур, ограниченных следующими линиями. Постройте соответствующие рисунки по данным в (**62-63**):

1) $y=2\sqrt{x},\ y=6,\ x=0;$ 2) $y=x^2,\ y=2\sqrt{2}x;$

3) $y=x^2,\ y=\sqrt[3]{x};$ 4) $y=\sqrt{x},\ y=\sqrt{4-3x},\ y=0.$

63. 1) $y=\sin 6x,\ x=0,\ x=\pi,$ ось Ox;

2) $y=\sin 2x,\ x=0,\ x=\dfrac{\pi}{2}$, ось Ox;

3) $y=\cos x,\ y=1+\dfrac{2}{\pi}x,\ x=\dfrac{\pi}{2};$

4) $y=-x^2,\ y=2e^x,\ x=0,\ x=1.$

64*. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=2x^2-8x$ и касательной к этой параболе и осью Oy.

65*. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+10$ и касательными к этой параболе, проходящими через точку (0; 1).

66. Пусть сила 2 *Н* сжимает пружину на 1 см. Найдите работу силы, которая сжимает эту пружину на 3 см.

67. Пусть $v(t)>0$ – скорость прямолинейно движущейся точки на отрезке времени $[t_1, t_2]$. Найдите путь, пройденный этой точкой за время от $t=t_1$, до $t=t_2$.

68*. Найдите объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривой $y=-x^2+1,\ 0\le x\le 1$.

69. Найдите объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривой $y=-x^2+4,\ 0\le x\le 2,\ x=0$ (ось Oy) вокруг оси Ox.

51 ПРИБЛИЖЁННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Если известна первообразная функции $f(x)$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ вычисляется с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

В случае, когда мы не можем найти первообразную функцию, ставится задача нахождения приближённого значения интеграла $\int_a^b f(x)dx$ Приведем несколько способов приближенного интегрирования.

Формула прямоугольников. Пусть на отрезке $[a; b]$ задана непрерывная функция $y=f(x)$. Разобьём отрезок $[a; b]$ точками $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ на n равных отрезков. Длина каждого отрезка при этом равна $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, где $a=x_0$, $b=x_n$. Проведем через точки разбиения $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n$ вертикальные прямые и отметим точки их пересечения с графиком функции $y=f(x)$ (все они перпендикулярны оси Ox). В результате соответствующая криволинейная трапеция разобьётся на n малых криволинейных трапеций.

Заменим каждую малую криволинейную трапецию прямоугольником с основанием $[x_k, x_{k+1}]$ и высотой, равной значению функции $y=f(x)$ в произвольной точке отрезка, например, значением $f(x_k)$ функции $f(x)$ в левом конце x_k, здесь $k=0,1, ..., n-1$.

Площадь фигуры, образованной этими прямоугольниками, приближённо равна площади криволинейной трапеции (рис 19). Таким образом, получим следующую приближённую формулу:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}. \quad (f(a)+f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})). \qquad (1)$$

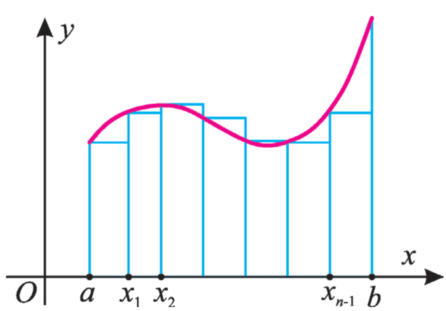


Рис. 19.

Эта формула называется *формулой прямоугольников* для приближённого вычисления определённого интеграла.

В качестве высот прямоугольников можно выбрать значение $f(x_{k+1})$, функции $f(x)$ в правом конце отрезка $[x_k, x_{k+1}]$ или значение $f(x_{k/2})$ функции в его середине $\frac{x_k + x_{k+1}}{2} = x_{k/2}$.

В этих случаях получим аналогичные приближённые формулы: $f(x_{k+1})$ или $f(x_{k/2})$ (рис. 20 a, b):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot \ (f(x_1)+f(x_2)+...+f(b)), \qquad (1a)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(x_{1/2})+f(x_{3/2})+...+f(x_{\frac{2n-1}{2}})\right) \qquad (1b)$$

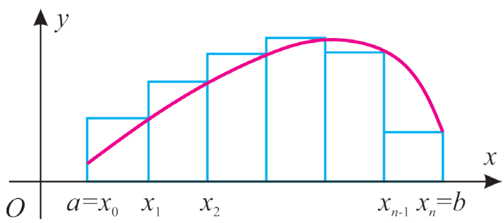


Рис. 20.a

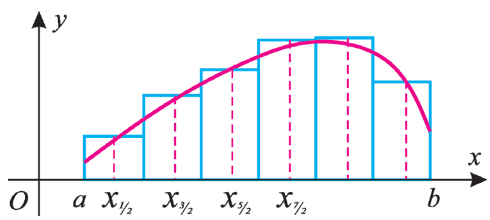


Рис. 20.b

Заменим теперь каждую малую криволинейную трапецию, образованную проведенными вертикальными прямыми и графиком функции $y=f(x)$, трапецией с основаниями $f(x_k)$ и $f(x_{k+1})$ и высотой, равной $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, здесь $k=0,1, ..., n-1$.

Сумма площадей полученных таким образом трапеций приближённо равна площади криволинейной трапеции (рис.20d).

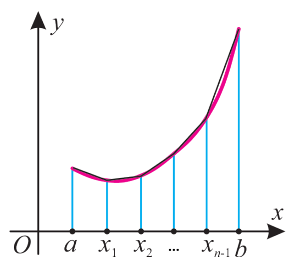


Рис. 20.d

Таким образом, получим следующую приближённую формулу:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})\right). \qquad (2)$$

Эта формула называется *формулой трапеций* для приближённого вычисления определённого интеграла.

Пример 1. Найдите приближённое значение интеграла $A=\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

△ Известно, что первообразная функция функции $f(x)=e^{-x^2}$ не находится в явном виде. Вычисление с помощью компьютера даёт значение A = 0,74685... .

Применим сначала формулу прямоугольников. Для этого разобьём прежде отрезок [0,1] на 5 равных частей: $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{5}=0{,}2$. Значит, $x_0=0$; $x_1=0{,}2$; $x_2=0{,}4$; $x_3=0{,}6$; $x_4=0{,}8$; $x_5=1$.

Вычислим значения функции $f(x)=e^{-x^2}$ в точках разбиения:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
e^{-x^2}	1	0,96079	0,85214	0,69768	0,52729	0,36788

Тогда, согласно формуле (1):

$$A\approx\frac{1}{5}\cdot(1+0{,}96079+0{,}85214+0{,}69768+0{,}52729+0{,}36788)=\frac{1}{5}\cdot 4{,}40578=0{,}887156.$$

Применим теперь формулу (2):

$$A\approx\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1+0{,}36788}{2}+0{,}96079+0{,}85214+0{,}69768+0{,}52729\right)=\frac{1}{5}\cdot 3{,}72184\approx 0{,}74437.$$

Отметим, что для этого примера формула трапеций даёт более точный результат. ▲

Пример 2. Найдите приближённое значение интеграла $B=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$, используя формулу (lb).

△ Разобьём отрезок [0; 1] на 10 равных частей.

$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{10}=\frac{1}{10}=0{,}1$.

Пусть точка $x_{\frac{2k+1}{2}}$ – середина отрезка $[x_k, x_{k+1}]$: $x_{\frac{2k+1}{2}}=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$, $k=0,1$, ..., 9.

Ясно, что $x_{\frac{1}{2}}=0{,}05$; $x_{\frac{3}{2}}=0{,}15$; $x_{\frac{5}{2}}=0{,}25$;

$x_{\frac{7}{2}}=0{,}35$; $x_{\frac{9}{2}}=0{,}45$; $x_{\frac{11}{2}}=0{,}55$; $x_{\frac{13}{2}}=0{,}65$; $x_{\frac{15}{2}}=0{,}75$; $x_{\frac{17}{2}}=0{,}85$; $x_{\frac{19}{2}}=0{,}95$;

Вычислим значения $f(x_{\frac{1}{2}})$, $f(x_{\frac{3}{2}})$, ..., $f(x_{\frac{19}{2}})$ функции $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ в точках разбиения $x_{\frac{1}{2}}$, $x_{\frac{3}{2}}$, ..., $x_{\frac{19}{2}}$ соответственно.

Например: $f(x_{\frac{15}{2}})=f(0{,}75)=f(\frac{3}{4})=\dfrac{1}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{16}{25}=0{,}64$

В результате получим следующую таблицу:

x	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95
$f(x)$	0,9975	0,9780	0,9412	0,8909	0,8316	0,7679	0,7029	0,6400	0,5806	0,5256

$$f(x_{\frac{1}{2}})+f(x_{\frac{3}{2}})+...+f(x_{\frac{19}{2}})=0,9975+0,9780+...+0,5256=7,8561$$

Значит, $B\approx\frac{1}{10}\cdot 7,8561=0,78561.$

В то же время $B=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg}x\Big|_0^1=\operatorname{arc\,tg}1-\operatorname{arc\,tg}0=\frac{\pi}{4}.$

Таким образом, приближённое вычисление $\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ свелось к нахождению приближённого значения $\frac{\pi}{4}$. Учитывая, что $\frac{\pi}{4}\approx 0,7854$, получим, что ошибка приближения приблизительно равна 0,7856 – 0,7854 = 0,0002. ▲

Упражнения

Разбив отрезок [0, 1] на 10 равных частей, найдите приближённое значение интеграла $B=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ используя:

70. формулу (1) – формулу прямоугольников.

71. формулу (la).

72. формулу трапеций. Сравните полученное значение со значениями, полученными в 70 и 71, а также со значением $\frac{\pi}{4}\approx 0,785398...$.

73*. Составьте компьютерную программу для приближённого вычисления интеграла $B=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ по формулам (1), (lb) и (2).

52–56 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Рассмотрим задачу определения пройденного пути $s(t)$ по заданной скорости $v(t)$.

Пусть, например, $v(t)=5-3t$ *(м/сек)*. Тогда для нахождения пути $s(t)$ необходимо решить уравнение $s'(t)=v(t)$. В этом уравнении присутствует производная искомой функции $s(t)$.

Определение. Уравнение, в котором участвует производная неизвестной функции, называется дифференциальным уравнением.

Таким образом, задача нахождения пути по заданной скорости сводится к решению дифференциального уравнения $s'(t)=v(t)$.

По определению первообразной функции решение дифференциального уравнения $y'=f(x)$ имеет вид $y(x)=F(x)+C$, где C – произвольная постоянная.

Задача 1. Решите дифференциальное уравнение $s'(t)=5-3t$.

В этой задаче спрашивается, как можно найти функцию $s(t)$, если задана её производная, равная $5-3t$. Это означает, что для нахождения решения достаточно найти первообразную этой функции. А первообразная функции $5-3t$, очевидно, равна $5t-\frac{3}{2}t^2+C$, здесь C – произвольная постоянная.

Ответ: $s(t)=5t-\frac{3}{2}t^2+C$. ▲

Задача 2. Решите дифференциальное уравнение $y'=3x^2-1$.

△ В этой задаче спрашивается, как можно найти функцию $y(x)$, если задана её производная, равная $3x^2-1$. Это означает, что для нахождения решения достаточно найти первообразную этой функции. А первообразная функции $3x^2-1$, очевидно, равна x^3-x+C, где C – произвольная постоянная. Таким образом, получим ответ $y=x^3-x+C$. ▲

Видно, что заданное дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений, то есть решение однозначно не находится. Для нахождения постоянной C необходимы дополнительные условия.

Задача 3. Найдите решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y'=\sin x+\cos x$, удовлетворяющее условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=5$.

△ Ясно, что каждое решение уравнения имеет вид $y(x)=-\cos x+\sin x+C$. Из условия задачи следует $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}+C=5$, откуда $C=4$. *Ответ:* $y=-\cos x+\sin x+4$. ▲

Задача 4. Найдите решение дифференциального уравнения $y'=1+2x+3x^2-4x^3$, удовлетворяющее условию $y(2)=9$.

△ Воспользуемся таблицей интегралов. Согласно таблице $y=x+x^2+x^3-x^4+C$. При $x=2$ имеем $y=9$. Отсюда $2+4+8-16+C=9$, значит $C=11$. *Ответ:* $y=x+x^2+x^3-x^4+11$. ▲

Задача 5. Скорость изменения переменной y в каждый момент времени t пропорционально значению этой переменной в этот же момент времени. Найдите значение y в момент времени t, если при $t=0$ значение переменной равно y_0.

△ Согласно условию задачи и смыслу производной получим дифференциальное уравнение относительно $y(t)$:

$$y'=ky, \tag{1}$$

здесь k – коэффициент пропорциональности.

Представим производную $y'(t)$ в “дробной” форме $\frac{dy}{dt}$ и запишем уравнение (1) как $\frac{dy}{dt}=ky$. Отсюда имеем равенство $\frac{dy}{y}=kdt$, из которого непосредственно получим соотношение $\int\frac{dy}{y}=\int kdt$. Проинтегрируем: $\ln y=kt+\ln C$ (удобно вместо постоянной C выбрать постоянную $\ln C$, $C>0$). Значит, $y=Ce^{kt}$. По условию, $y_0=C\cdot e^{k\cdot 0}$, то есть $C=y_0$ и

$$y=y_0\cdot e^{kt} \tag{2}$$

Ответ: $y=y_0\cdot e^{kt}$. ▲

Мы знаем, что задача 3 моделирует многие процессы физики, биологии, химии (см. темы 29–32 части I).

Задача 6. Пусть скорость изменения величины $y(t)$ пропорциональна разности этой величины и некоторой постоянной a. Найдите зависимость $y(t)$ от времени t, если при $t=0$ значение величины $y(t)$ равно y_0.

△ Мы можем выписать соответствующее дифференциальное уравнение:

$$y'=k(y-a). \tag{3}$$

Для решения уравнения (3) введём обозначение $z=y-a$.

Так как $z'=(y-a)'=y'-a'=y'-0=y'$, уравнение (3) примет вид $z'=kz$. Очевидно, что это уравнение имеет решение $z=z_0\cdot e^{kt}$. Из того, что $y=z+a$, $z=y_0-a$, получим

$$y=a+(y_0-a)e^{kt}, \tag{4}$$

здесь число y_0 равно значению $y(t)$ при $t=0$. *Ответ:* $y=a+(y_0-a)e^{kt}$. ▲

Уравнение (4) также является математической моделью многих процессов (см. темы 29–32 части I).

Рассмотрим геометрическую задачу, сводящуюся к дифференциальному уравнению.

Задача 7. Пусть кривая проходит через точку $M(a, b)$, $a>0$, $b>0$. Отрезок, образуемый пересечением касательной в произвольной точке кривой с координатными осями, делится точкой касания пополам. Напишите уравнение данной кривой.

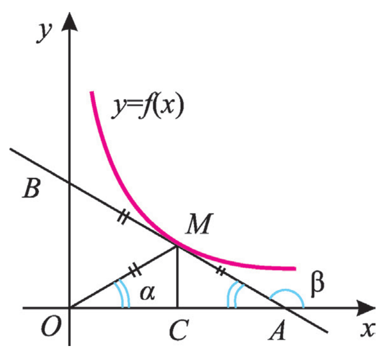


Рис. 21.

Пусть уравнение искомой кривой имеет вид $y=f(x)$. Проведём касательную к данной кривой в точке $M(x, y)$. Пусть она пересекает координатные оси в точках A и B (рис. 21). ΔAOB – прямоугольный, точка M – середина гипотенузы AB, отрезок OM – медиана, опущенная на гипотенузу. Так как $OM = \frac{1}{2}AB$, то треугольник ΔMOA – равнобедренный. Значит, $\angle MOA=\angle MAO$. Отсюда $\alpha=\angle MOA=180°-\angle MAx=180°-\beta$ и $\mathrm{tg}\alpha=-\mathrm{tg}\beta$. Однако $\mathrm{tg}\alpha=\frac{MC}{OC}$, а $\mathrm{tg}\beta$ является угловым коэффициентом касательной к графику, проведённой через точку M, то есть $\mathrm{tg}\beta=y'$. Отсюда получим дифференциальное уравнение $y'=-\frac{y}{x}$. Мы можем найти уравнение искомой кривой в виде $y=f(x)$. Представим производную y' в форме "дроби" $\frac{dy}{dx}$ и выпишем уравнение в виде $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$. Отсюда получим равенство $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$, а далее – равенство $\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}$. Найдя интегралы, приходим к равенству $\ln y=-\ln x+\ln C$.

Отсюда $y=e^{-\ln x}\cdot e^{\ln C}=\frac{C}{x}$, $y=\frac{C}{x}$. Из начального условия $y(a)=b$ можно получить значение $C=ab$. *Ответ:* $y'=\frac{ab}{x}$. ▲

Задача 8*. Сосуд объёмом 50 литров заполнен газовой смесью, 70 процентов которой – азот, а 30 процентов – кислород. Каждую секунду в сосуд поступает 0,2 литров азота, а из сосуда выходит столько же газовой смеси. Через какое время в сосуде окажется 99% азота?

△ Пусть через t секунд после начала процесса в сосуде окажется $y(t)$ литров азота. Тогда доля азота в сосуде равна $\frac{y}{50}$. За время Δt в сосуд поступает $0{,}2\cdot\Delta t$ литров азота, а выходит $0{,}2\cdot\Delta t$ литров смеси. Предположим, что концентрация азота на малом промежутке времени $[t, t+\Delta t]$ не изменяется. Тогда в объёме $\frac{y}{50}$ содержится $\frac{y}{50}\cdot 0{,}2\cdot\Delta t$ литров азота. Ясно, что доля азота возросла при этом на величину $\Delta y\approx 0{,}2\cdot\Delta t-\frac{0{,}2y}{50}\cdot\Delta t$. Отсюда получим $\frac{\Delta y}{\Delta t}\approx 0{,}2-\frac{0{,}2y}{50}$ (отметим, что отношение $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ является отношением приращения функции $y(t)$ на приращение аргумента t). Когда Δt стремится к нулю ($\Delta t\to 0$), из данного соотношения получим соотношение

$$y' = 0,2 \cdot \left(1 - \frac{y}{50}\right) \qquad (5)$$

Таким образом, рассмотренный процесс моделируется дифференциальным уравнением (5). Для того, чтобы решить его, приведём сначала к виду $y' = -0,004(y-50)$. Из (3) и (4) заключаем, что решение (5) имеет вид $y = 50 + (y_0 - 50) \cdot e^{-0,004t}$, здесь число y_0 – значение функции $y(t)$ в момент времени $t=0$. Согласно условию задачи, в начальное время (при $t=0$) в 50 – литровом сосуде находится 70% азота, что соответствует 35 литрам. Значит $y_0 = 35$ литров. Точно также 99% азота соответствует $50 \cdot 0,99 = 49,5$ литрам азота. Чтобы найти время, когда наступит это состояние, решим показательное уравнение $49,5 = 50 - 15 \cdot e^{-0,004t}$, или равносильное ему уравнение $15 \cdot e^{-0,004t} = 0,5$.

$$e^{-0,004t} = \frac{1}{30}, \quad -0,004t = -\ln 30,$$

$$t = \frac{\ln 30}{0,004} \approx \frac{3,4112}{0,004} \approx 852,8 \text{ (сек)} \approx 14,2 \text{ (мин)}.$$ *Ответ:* 14,2 мин. ▲

? Вопросы и задания

1. Что называется дифференциальным уравнением?
2. Приведите примеры, приводящие к уравнению $y' = ky$.
3. Найдите решение уравнения $y' = y$ такое, что $y(0) = 1$.

Упражнения

Покажите, что заданная функция является решением дифференциального уравнения (**74–76**):

74. $y = x^2 + x, \; xy' = y + x^2$;

75*. $y = xe^x, \; y'' + 3y' - 4y = 5 \cdot e^x$, здесь через $y'' = (y')'$ обозначена вторая производная функции $y(x)$. Заданное уравнение является *дифференциальным уравнением второго порядка*.

76. $y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx, \; y'' + k^2 \cdot y = 0$.

77. Температура воздуха в комнате равна 20°С. Горячая вода в течение 20 минут остывает со 100 до 60°С. Считая, что скорость остывания воды пропорциональна разности её температуры и температуры окружающего воздуха, определите время, за которое вода остынет до 30°.

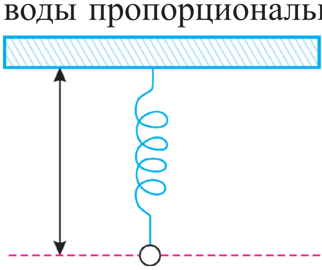


Рис 22.

78*. Математической моделью многих периодических процессов (рис. 22) (например, колебание пружины, математического маятника) служит дифференциальное уравнение

$y''+\omega^2 y=0$. Это уравнение называется *дифференциальным уравнением гармонических колебаний*. Покажите, что функция $y(x)=C_1\cdot\sin(\omega x+C_2)$ удовлетворяет заданному уравнению $y''+\omega^2 y=0$, здесь ω – заданное положительное число.

79. Пусть период полураспада радиактивного вещества равен 1000 лет. Какая часть вещества останется через: 100 лет; 500 лет; 2000 лет, если вначале было m_0 вещества?

Выпишите дифференциальное уравнение гармонических колебаний (**80–81**):

80*. $y(t)=5\sin(4t+\frac{\pi}{6})$. **81.** $y(t)=4\sin(5t-\frac{\pi}{3})$.

82. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию: 1) $y'=7\cos x$, $y(\frac{\pi}{2})=1$; 2) $y'=e^{-x}$, $y(1)=2$.

83. В сосуде находится 10 литров чистой воды. Ежеминутно в сосуд подаётся 2 литра 30% -ного раствора соли. Этот раствор, перемешиваясь с содержимым сосуда, с такой же скоростью выливается из сосуда. Найдите закон, по которому изменяется количество соли в сосуде.

Упражнения к главе II

Вычисление определенных интегралов

Является ли функция $F(x)$ первообразной функции $f(x)$ (**84–85**):

84. 1) $F(x)=x(\ln x-1)$, $f(x)=\ln x$;

2) $F(x)=-5-\cos 2x$, $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$;

3) $F(x)=4x^2+2\operatorname{tg}3x+2$, $f(x)=8x+\frac{6}{\cos^2 3x}$.

85. 1) $F(x)=-x+\sqrt[5]{x^4}-e^{2x}+10$, $f(x)=-1+\frac{4}{5\sqrt[5]{x}}-2e^{2x}$;

2) $F(x)=3^{2x}-\frac{7}{x}-\sin 4x-7$, $f(x)=(2\ln 3)\cdot 3^{2x}-4\cos 4x+\frac{7}{x^2}$;

3) $F(x)=\sqrt{x}+\ln 5\cdot\log_5 x-18$, $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\log_5 x$?

86. Для какой из функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ функция $F(x)$ является первообразной:

1) $f_1(x)=6(x^2-1)$, $f_2(x)=6x^2-6x+4$, $f_3(x)=6x(x-2)$, $F(x)=2x^3-6x^2+9$;

2) $f_1(x)=-4\sin x\cos x$, $f_2(x)=4\sin x\cos x$, $f_3(x)=-\sin 2x$, $F(x)=-\cos 2x$;

3) $f_1(x)=3x^2-2x$, $f_2(x)=-3x\cdot\left(\frac{4}{3}-x\right)$, $f_3(x)=3x^2-4x$, $F(x)=x^3-2x^2+3$?

87. Вычислите интеграл: $A=\int\frac{6x-9}{x^2-4x+5}dx$.

△ Выпишем интеграл в виде:

$$A=\int\frac{3\cdot(2x-4)+3}{x^2-4x+5}dx=3\int\frac{2x-4}{x^2-4x+5}+3\int\frac{dx}{(x-2)^2+1}\ .$$

В силу того, что $(x^2-4x+5)'=2x-4$, 1-ый интеграл равен $3\int\frac{d(x^2-4x+5)}{x^2-4x+5}=3\ln\left|x^2-4x+5\right|+C$. Отметим, что здесь мы применили замену $x^2-4x+5=t$, которая привела к тому, что 1-ый интеграл принял вид: $3\int\frac{dt}{t}=3\ln|t|+C_1$.

Согласно таблице интегралов, 2-ой интеграл равен $3\operatorname{arc\,tg}(x-2)+C_2$.

Ответ: $A=3\ln|x2-4x+5|+3\ \operatorname{arc\,tg}(x-2)+C$, $C=C_1+C_2$. ▲

88 Отметим, что пункты 1), 5) упражнения 88 и пункты 3), 4), 6) упражнения 89 решаются аналогичной заменой.

Найдите первообразную (**88–89**):

88. 1) $\int\frac{e^x dx}{e^x+1}$; 2) $\int\cos(3x-2)dx$; 3) $\int\frac{dx}{x^2+4x+5}$;

4) $\int 5ax^4dx$; 5) $\int\frac{\sin xdx}{\cos^2 x}$.

89. 1) $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; 2) $\int ene^{x^2-1}dx$; 3) $\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$;

4) $\int\frac{\sin 6x}{1+\cos 6x}dx$; 5) $\int e^{3\ln x}dx$; 6) $\int\frac{3x+2}{x^2+2x}dx$.

90. Вычислите интеграл: $I=\int\sin^4 x\cos^3 xdx$.

△ Сделаем замену $\sin x=t$. Тогда $\cos^2 x=1-t^2$, $dt=\cos xdx$. Таким образом, $I=\int t^4\cdot(1-t^2)dt=\int(t^4-t^6)dt$. Согласно таблице интегралов последний интеграл равен $\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7+C$.

Значит, ответ: $I=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C$ ▲

91. Вычислите интеграл: $\int\sin^2 x\cos^2 xdx$.

△ Сделаем замену $\sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}$. Тогда

$$\int\sin^2 x\cos^2 xdx=\frac{1}{4}\int\sin^2 2xdx=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx=$$

$=\frac{1}{8}\int dx-\frac{1}{8}\int\cos 4xdx=\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C$. *Ответ:* $\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C$ ▲

92. Найдите первообразную $F(x)$ функции $f(x)=3\cos x+\sqrt{3x-2}$, проходящую через точку $A\left(\frac{2}{3};0\right)$.

△ Согласно таблице интегралов и правилам интегрирования

$$F(x)=\int f(x)dx=3\int\cos xdx+\int\sqrt{3x-2}dx=3\sin x+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{(3x-2)^3}}{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=3\sin x+\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(3x-2)^3}+C.$$

По условию $F\left(\frac{2}{3}\right)=0$, значит $3\cdot\sin\frac{2}{3}+C=0$, $C=-3\cdot\sin\frac{2}{3}$.

Ответ: $F(x)=3\sin x+\frac{2}{9}\sqrt{(3x+2)^3}-3\cdot\sin\frac{2}{3}$. ▲

93. Найдите первообразную $F(x)$ функции $f(x)$, проходящую через точку A:

1) $f(x)=\sin 2x,\ A\left(\frac{\pi}{4};2\right)$; 2) $f(x)=\sqrt{x},\ A(4;6)$;

3) $f(x)=e^{-3x},\ A\left(\ln 2;\frac{5}{24}\right)$; 4) $f(x)=\sin x-\cos x,\ A\left(\frac{\pi}{2};1\right)$;

5) $f(x)=2x^2-3\sqrt{x}+4,\ A\left(1;\frac{2}{3}\right)$; 6) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 3x},\ A\left(\frac{\pi}{12};-1\right)$.

Вычислите интеграл (**94–96**):

94. 1) $\int\frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int\frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 3) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx$;

4) $\int xe^{x2}dx$; 5) $\int 3^x\cdot 2^{2x}dx$; 6) $\int\frac{4\ln^3 x}{x}dx$.

95*. 1) $\int\cos x\sqrt{\sin x}dx$; 2) $\int\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 3) $\int\frac{1-\cos x}{x-\sin x}dx$;

4) $\int\frac{2x+3}{x^2+2x+2}dx$; 5) $\int\frac{dx}{(2x-1)^4}$; 6) $\int\frac{dx}{x^2+x}$.

96*. 1) $\int\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}dx$; 2) $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$; 3) $\int\frac{\sin^3 x}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}}dx$;

4) $\int\frac{(1-\sin x)\cos x}{\sin x}dx$; 5) $\int\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}dx$; 6) $\int\cos 5x\cos xdx$.

Вычислите интеграл (**97–103**):

97. 1) $\int_0^3 xe^x dx$; 2) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x+1}$; 3) $\int_1^2 e^{-5\ln x} dx$.

98. 1) $\int_0^1 xe^{-x} dx$; 2) $\int_0^3 \frac{x^2-4}{x+2} dx$; 3) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

99*. 1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$; 2) $\int_0^1 2 \cdot e^{-2x} dx$; 3) $\int_1^{e^4} \frac{\ln x}{x} dx$.

100*. 1) $\int_1^4 \frac{dx}{x^2+2x}$; 2) $\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+16}}$; 3) $\int_0^{4\sqrt{2}} \frac{xdx}{x^2+4}$.

101*. Пусть 1) $\int_1^a (2x-3)dx = 0$; 2) $\int_0^4 \frac{2x+5}{2x+3} dx = a + \ln\frac{17}{3}$. Найдите a.

102. 1) $\int_2^3 d(2^{2x-1})$; 2) $\int_0^4 (x-2)(x^2+2x+4)dx$; 6) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$.

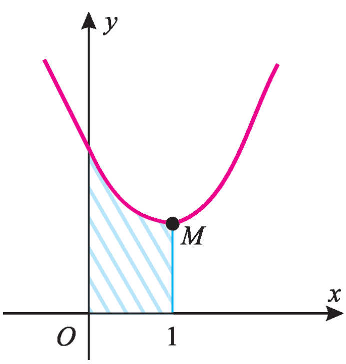


Рис. 23.

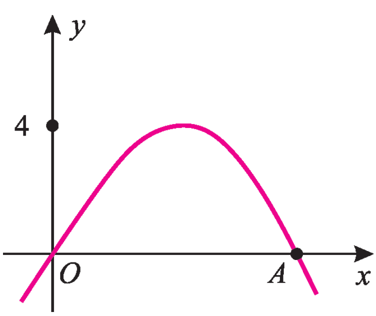


Рис. 24.

103. 1) $\int_0^2 (3x+1)^4 dx$; 2) $\int_1^e \frac{dx}{0,5x}$; 3) $\int_0^\pi \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right) dx$.

104*. Пусть вершина параболы $y=x^2-2x+4$ совпадает с точкой M $(x_0; y_0)$. Найдите площадь заштрихованной фигуры (рис. 23).

△ Найдём вершину параболы $y=x^2-2x+4$ $=(x-1)^2+3$. Отсюда $x_0=1$, $y_0=3$.

Таким образом, пределы интегрирования будут от $a=0$ до $b=1$.

$$S = \int_0^1 \left[(x-1)^2+3\right] dx = \int_0^1 (x-1)^2 dx + 3\int_0^1 dx =$$

$$= \frac{(x-1)}{3}\Big|_0^1 + 3 \cdot x\Big|_0^1 = 0 + \frac{1}{3} + 3 = 3 + \frac{1}{3}.$$

Ответ: $3\frac{1}{3}$ (кв. ед.) ▲

105*. Парабола $f(x)$ пересекает ось Ox в точках O (0; 0) и $A(x_0; 0)$. Пусть площадь фи-

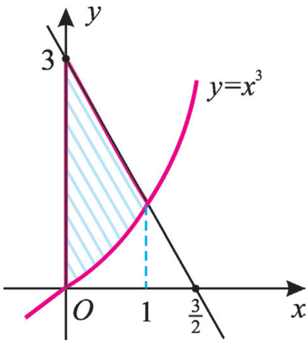


Рис. 25.

гуры, ограниченной этой параболой и осью Ox, равна $\frac{32}{3}$ (кв. ед.) Найдите x_0 и выпишите уравнение параболы (рис. 24).

△ При $x=0$ $f(0)=0$, а при $x=x_0$. $f(x_0)=0$. Отсюда – $x_0^2+bx_0=0$, $x_0=b$. Тогда получим уравнение параболы $f(x)$: $f(x)=-x^2+x_0\cdot x$. Значит,

$$S=\int_0^{x_0}(-x^2+x_0\cdot x)dx=-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{x_0}+x_0\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{x_0}= \qquad x$$

$$=-\frac{1}{3}x_0^{\ 3}+\frac{x_0^{\ 3}}{2}=\frac{x_0^{\ 3}}{6}.$$

По условию $\frac{32}{3}$, значит, $\frac{x_0^{\ 3}}{6}=\frac{32}{3}$, отсюда $x_0=4$.

Ответ: $x_0=4$; $f(x)=-x^2+4x$. ▲

106. Найдите площадь заштрихованной фигуры (рис. 25).

△ Кубическая парабола $y=x^3$ пересекается с прямой в точке $A(1;\,1)$. Прямая, проходящая через точки (0; 3) и (1; 1), описывается уравнением $y=-2x+3$. Эта прямая пересекает ось Ox в точке $\left(\frac{3}{2};0\right)$. Приведём два способа нахождения заштрихованной фигуры.

1-способ. $S=\int_0^1(-2x+3-x^3)dx=(-x^2+3x-\frac{x^4}{4})\Big|_0^1=-1+3-\frac{1}{4}=1\frac{3}{4}$.

2-способ. Вычтем из площади трапеции с вершинами в точках O (0; 0), (0; 3), (1; 1) и (1; 0) площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$, $x=1$, $y=0$. Площадь трапеции равна $\frac{1+3}{2}\cdot 1=2$ $=2$ (кв.ед), а 2-ая площадь равна $\int_0^1 x^3dx$. Так как $\int_0^1 x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}$ (кв.ед), то искомая площадь равна $2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$ (кв.ед) *Ответ:* $1\frac{3}{4}$ (кв.ед)

▲.

107. Найдите площадь заштрихованной фигуры (рис. 26).

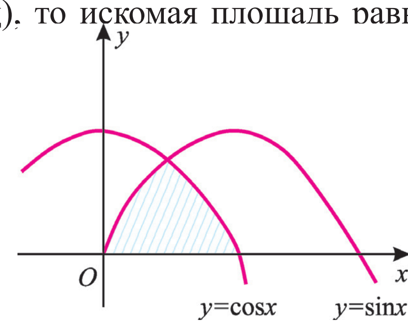


Рис. 26.

△ Ясно, что графики функций $y = \cos x$ и $y = \sin x$ пересекаются в точке $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Прямая $x = \frac{\pi}{4}$ делит криволинейный треугольник ровно пополам. В этом случае искомая площадь равна

$$S = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -2 \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -2(\cos\frac{\pi}{dx} - \cos 0) = -2 \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$$

Ответ: $2 - \sqrt{2}$ (кв. ед). ▲

108. На рис. 27 изображена часть графика функции $f(x) = -x^2 - 4x$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

△ $S = \int^{0} (-x^2 - 4x)dx + \int^{1} (0 - (-x^2 4x))dx = \left(-\frac{x^3}{3} - 2x^2\right)\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3} + 2x^2\Big|_0^1 =$

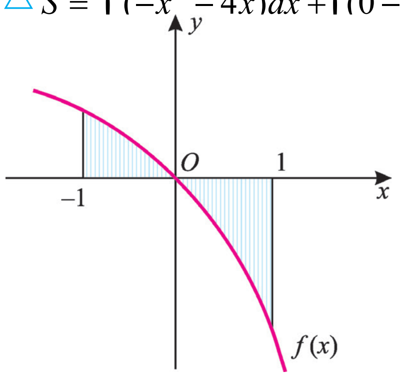


Рис. 27.

$= \frac{-1}{3} + 2 + \frac{1}{3} + 2 = 4$, Значит, $S = 4$ (кв. ед).

Ответ: 4 (кв.ед.)

109. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^3$ и $y^2 = 32x$.

Найдите площадь фигуры, ограниченной следующими кривыми. Приведите чертёж (**110–113**):

110. 1) $y = 3x^2$, $x = 2$, $y = 0$; 2) $y = -x^2 + 4$, $y = 0$ (ось Ox).

111. 1) $y = x^2 + 4x + 4$, ось Ox и ось Oy;

2) $y^3 = x$, $x = 1$, $x = 27$ и ось Ox.

112. 1) $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{3}{2}x^2 + 8$; 2) $y = \ln x$, $x = e^3$ и ось Ox.

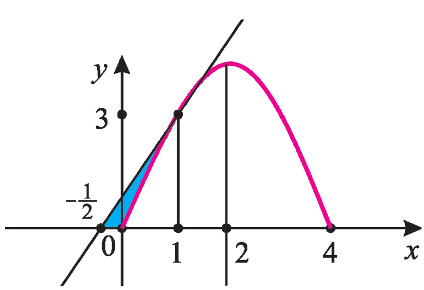


Рис. 28.

113. 1) $y = -x^2 + x$ и ось Ox; 2) $y = \sqrt{x}$, ось Ox, $y = 2 - x$.

114. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью Ox, параболой $y = -x^2 + 4x$ и прямой, касающейся её в точке $A(1; 3)$ (рис. 28).

△ Уравнение касательной к кривой

$y=f(x)$ в точке $A(x_0; y_0)$ имеет вид $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

Из того, что $x_0=1$, $y_0=3$ и $f'(1)=2$ получим, что уравнение касательной к параболе в точке $A(1; 3)$ имеет вид $y-3=2\cdot(x-1)$, или $y=2x+1$.

Эта касательная пересекает ось Ox в точке $x=-\frac{1}{2}$. Площадь закрашенной области, очевидно, равна разности площадей прямоугольного треугольника с катетами 3 и $\frac{3}{2}$ и криволинейного треугольника.

Найдём их: $S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 3=\frac{9}{4}$(кв.ед). Площадь криволинейного треугольника равна $S=\int\limits_0^1(-x^2+4x)dx=-\frac{x^3}{3}+2x^2\Big|_0^1=-\frac{1}{3}+2=1\frac{2}{3}$(кв.ед).

Таким образом, искомая площадь равна $\frac{9}{4}-\frac{5}{3}=\frac{7}{12}$(кв.ед).

Ответ: $\frac{7}{12}$(кв.ед). ▲.

115. Найдите площадь фигуры, ограниченной следующими кривыми. Приведите чертёж:

1) $y=\frac{1}{2}x^2$ и $y=\frac{1}{1+x^2}$; 2) $x=9$ и $y^2=x$;

3) $y=5x-8$ и $y=-x^2+3x$; 4) $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$.

116. Тело, брошенное вертикально вверх с начальной скоростью v_0, имеет скорость $v(t)=v_0-gt$; здесь g – ускорение свободного падения, t – время. Найдите максимальную высоту, на которую поднимется тело.

117. Тело движется по прямой со скоростью $v(t)=\sqrt{2t+3}$ м/сек. Найдите путь, пройденный телом за первые 3 секунды после начала движения.

118. Тело движется по прямой со скоростью $v(t)=2t^2+3t$. (v измеряется м/сек, а t – в секундах). Найдите путь, пройденный телом, начиная с $t_1=1$ до $t_2=4$.

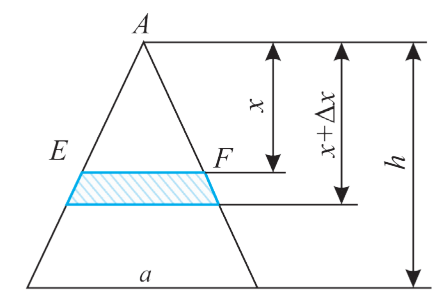


Рис. 29.

119*. Пластинка в форме треугольника с высотой h и основанием a вертикально погружается в воду так, что её вершина оказалась на поверхности воды. Найдите силу давления, оказываемого на эту пластинку водой.

△ Согласно закону Паскаля, сила давления жидкости, оказываемой на плоскую фигуру площади S, погруженную на глубину r, равна $P=\rho grS$, здесь ρ – плотность жидкости (для воды она равна $r=1$), g – ускорение свободного падения. Рассмотрим «полоску», соответствующую глубине x и имеющую толщину Δx (рис. 30). Представим, что эта полоска имеет форму прямоугольника, и найдём основание EF.

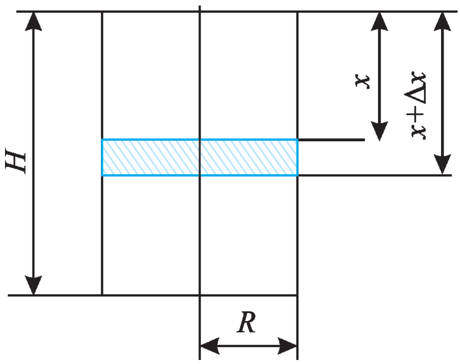


Рис. 30.

Так как $\Delta ABC \sim \Delta AEF$, то $EF = \dfrac{ax}{h}$.

В этом случае ΔS приближённо равно $\dfrac{ax}{h}\cdot\Delta x$: $\Delta S \approx \dfrac{ax}{h}\cdot\Delta x$. Согласно закону Паскаля, сила давления жидкости на участок площади ΔS равна

$\Delta P \approx \rho gx\cdot\dfrac{ax}{h}\Delta x = \dfrac{\rho ga}{h}x^2\cdot\Delta x$.

Площадь треугольника ABC равна сумме площадей ΔS. Тогда $\dfrac{\Delta p}{\Delta x} \approx \dfrac{\rho ga}{h}x^2$. При достаточно малых Δx, то есть при стремлении Δx к нулю, отношение $\dfrac{\Delta P}{\Delta x}$ стремится к P' (к производной функции P). Отсюда получим равенство $P' = \dfrac{\rho ga}{h}x^2$. Значит, сила давления P жидкости на площадь ΔABC вычисляется следующим образом:

$$P = \int_0^h \frac{\rho ga}{h}x^2dx = \frac{\rho ga}{h}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}\rho gah^2. \quad \textit{Ответ:}\ P = \frac{1}{3}\rho gah^2.\ \blacktriangle$$

120. Цилиндр с радиусом основания R, высотой H, стоит вертикально и заполнен водой. Найдите работу, необходимую для выкачивания воды (рис. 31).

△ *Указание*. «Малый» цилиндр с основаниями, отстоящими на расстояниях x и $x+\Delta x$ от основания заданного цилиндра, имеет объём $\pi R^2\Delta x$ и массу $\pi R^2 g\Delta x$. Для поднятия этой массы на высоту x необходимо затратить работу $\Delta A \approx \pi R^2 g\Delta x\cdot x$. Отсюда $\dfrac{\Delta A}{\Delta x} \approx \pi R^2 gx$. Получаем дифференциальное уравнение $A' = \pi R^2 gx$. Отсюда $A = \int_0^H \pi R^2 gxdx = \pi R^2 g\cdot\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^H = \dfrac{\pi R^2H^2g}{2}$. *Ответ:* $A = \dfrac{\pi g}{2}\cdot R^2H^2$. ▲

Типовое контрольное задание
Вариант I

1. Найдите первообразную $F(x)$ функции $f(x)=2\sin 5x+\sqrt{x}+\frac{3}{5}$ такую, что графики функций $f(x)$ и $F(x)$ пересекаются на оси Oy.

(*Указание*: Условие пересечения графиков функций $f(x)$ и $F(x)$ на оси Oy означает выполнение условия $f(0)=F(0)$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^3$, $y=\frac{8}{3}\sqrt{x}$ и $y=8$. Приведите соответствующий чертёж.

3. Тело движется по прямой со скоростью $v(t) = 2t^2+3t$. Здесь t измеряется в секундах, а v – в м/сек. Найдите путь, пройденный телом за промежуток времени от $t_1=1$ до $t_2=6$. Чему равно ускорение тела в момент времени $t=3$?

4. Для растяжения пружины на 1 см затрачивается сила 1 *Н*. Какая сила необходима для растяжения пружины на 5 см? (Согласно закону Гука, сила пропорциональна растяжению).

5. Докажите, что для произвольных C_1 и C_2 функция $y=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x$ является решением дифференциального уравнения $y''+25y=0$.

Вариант II

1. Найдите первообразную функции $f(x)=3\cos 4x+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{5}{8}$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=x$, $y=\frac{1}{3}x^2$.

3. Пусть точка движения по прямой со скоростью $v(t) = 4t^2-5t$ (t – измеряется в секундах, а v – в $м/с$). Какой путь она пройдёт в промежутке времени от $t_1=2$ до $t_2=3$? Чему равно ускорение в момент времени $t=3$?

4. Для растяжения пружины на 3 см применена сила, равная 2Н. КАкая сила будет применена, чтобы растянуть пружинку на 6 см? (Согласно закону Гука, сила пропорциональна растяжению пружины).

5. Докажите, что функция $y=C_1\cos 7x+C_2\sin 7x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''+49y=0$ при всех значениях C_1 и C_2.

ГЛАВА III. АНАЛИЗ ДАННЫХ. ВЕРОЯТНОСТЬ

57–58 КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

Комбинаторные задачи на перебор вариантов

Основной вопрос комбинаторики – «сколько», основная задача – подсчёт числа элементов конечного множества. В комбинаторных задачах нас обычно интересует, сколько комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно составить из заданного конечного набора объектов.

В простейших случаях при переборе вариантов желательно придерживаться следующих двух правил.

1. Обозначаем наши комбинации буквами или цифрами так, что каждая комбинация будет обозначена своей уникальной последовательностью букв или цифр.

2. Выписываем комбинации в алфавитном порядке (при обозначении буквами) или по возрастанию чисел (при обозначении цифрами).

Тогда мы не упустим какую-то комбинацию или, наоборот, не посчитаем некоторую комбинацию дважды.

Задача 1. Мадина собирается съесть яблоко, грушу и мандарин, но пока не решила, в какой последовательности. Сколькими способами Мадина может выбрать эту последовательность?

△ Обозначаем буквами: Я–яблоко, Г–груша, М–мандарин. Тогда, например, ГМЯ–это вариант, когда Маша сначала съест грушу, потом – мандарин, потом – яблоко.

Выпишем варианты в алфавитном порядке: ГМЯ, ГЯМ, МГЯ, МЯГ, ЯГМ, ЯМГ. Получилось 6 вариантов. ▲

Задача 2. Сколько существует четырёхзначных чисел, сумма цифр которых меньше 4?

△ Здесь обозначать нечего – мы и так имеем дело с числами. Остаётся лишь выписать по возрастанию все четырёхзначные числа, сумма цифр которых равна 1, 2 или 3: 1000; 1001; 1002; 1010; 1011; 1020; 1100; 1101; 1110; 1200; 2000; 2001; 2010; 2100; 3000. Всего получилось 15 чисел. ▲

Задача 3. Сколько существует трёхзначных чисел, начинающихся с цифры 2 и состоящих из цифр 1,2,3,4 и 5?

△ Рассмотрим все варианты в соответствии со второй и третьей цифрой:

	1	2	3	4	5
1	211	212	213	214	215
2	221	222	223	224	225
3	231	232	233	234	235
4	241	242	243	244	245
5	251	252	253	254	255

Ответ. Всего 25 чисел. ▲

Задача 4. Из пяти учеников 11-тых классов школы необходимо выбрать пару дежурных так, чтобы в каждой паре не было учеников одного и того же класса. Сколькими способами это можно осуществить?

△ Обозначим классы цифрами 1,2,3,4,5 и выпишем все варианты: (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5).

Ответ. Всего 10 способов. ▲

Правила суммы и произведения

Правило суммы и правило произведения − основные комбинаторные принципы, которые используются в комбинаторике повсеместно и эффективно.

Задача 5. На подносе лежат 5 яблок и 3 груши. Сколькими способами можно выбрать фрукт с подноса?

△ Яблоко можно выбрать пятью способами. Грушу можно выбрать тремя способами.

Стало быть, один из этих фруктов можно выбрать $5 + 3 = 8$ способами. ▲

Задача 6. a) На вершину горы ведут 7 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее?

b) Что изменится, если подъем и спуск должен осуществляться различными путями?

△ a) У туриста есть 7 способов подняться на гору и для каждого из них есть 7 способов спуститься. Итого $7+7+7+7+7+7+7=7\cdot7=49$ способов.

b) Для каждого из 7 способов подняться в гору будет не 7, а 6 способов спуститься. Поэтому ответ $7\cdot6=42$. ▲

Задача 7. В магазине есть 5 разных чашек, 3 разных блюдца и 4 разные чайные ложки.

a) Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?

b) Сколькими способами можно купить комплект из чашки, блюдца и ложки?

c) Сколькими способами можно купить два предмета с разными названиями?

△ a) Выберем чашку. В комплект к ней можно выбрать любое из трех блюдец. Поэтому есть 3 разных комплекта, содержащих выбранную чашку. Поскольку чашек всего 5, то число различных комплектов равно 15 ($15 = 5 \cdot 3$).

b) Выберем любой из 15 комплектов предыдущей задачи. Его можно дополнить ложкой четырьмя различными способами. Поэтому общее число возможных комплектов равно 60 ($60 = 15 \cdot 4 = 5 \cdot 3 \cdot 4$).

c) Возможны три разных случая: первый – покупаются чашка с блюдцем, второй – чашка с ложкой, третий – блюдце и ложка. В каждом из этих случаев легко сосчитать количество возможных вариантов (в первом – 15, во втором – 20, в третьем – 12). Складывая, получаем общее число возможных вариантов: 47. ▲

Задача 8. Сколько существует пятизначных чисел, у которых все цифры чётные?

△Представим себе пять последовательных позиций для цифр пятизначного числа.

На первую позицию можно поставить четыре цифры: 2, 4, 6 или 8. На вторую позицию можно поставить пять цифр: 0, 2, 4, 6 или 8. На третью, четвёртую и пятую позиции можно поставить те же пять цифр: 0, 2, 4, 6 или 8. Всего имеем $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2500$ вариантов заполнения позиций; именно столько и будет искомых чисел.▲

При решении этих задач использовались следующие два правила.

Правило суммы. *Если объект A может быть выбран m способами, а объект B − другими n способами при условии, что одновременный выбор A и B невозможен, то выбор (A или B) можно осуществить m + n способами.*

Правило произведения. *Если объект A может быть выбран m способами и после каждого такого выбора объект B может быть выбран n способами, то выбор (A и B) можно осуществить mn способами.*

Перестановки с повторениями и без них

Задача 9. В комнате пять лампочек. Каждая может гореть или не гореть. Сколькими способами может быть освещена комната?

△ Для первой лампочки есть два варианта − гореть или не гореть, для каждого из них есть два варианта для второй лампочки, то есть всего $2 \cdot 2 = 4$ варианта. Рассуждая аналогично и применяя последовательно правило произведения, получаем $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ варианта.▲

Обобщим предыдущую задачу и найдем число всех подмножеств множества из n элементов.

Подмножество определяется тем, какие элементы в него входят, а какие не входят. Для каждого из n элементов множества есть 2 варианта − входит он в подмножество или не входит, поэтому по аналогии с предыдущей задачей получаем 2^n вариантов.

Задача 10. Есть 3 курицы, 4 утки и 2 гуся. Сколько комбинаций для выбора нескольких птиц таких, что среди выбранных были и куры, и утки, и гуси?

△ Любая курица либо входит, либо нет в число выбранных. Поэтому имеем 2^3 способов выбора кур. Так как по условию хотя бы одна курица будет выбрана, получаем 7 способов выбора кур. Точно так же есть $2^4 - 1 = 15$ способов выбора уток и $2^2 - 1 = 3$ способа выбора гусей. Всего $7 \cdot 15 \cdot 3 = 315$ способов ▲.

Задача 11. В футбольной команде 11 человек. Сколькими способами можно выбрать: a) капитана и его ассистента; b) капитана, первого ассистента и второго ассистента?

△ a) Капитаном можно выбрать любого из 11 футболистов. Ассистентом – любого из 10 оставшихся. Поэтому капитана и ассистента можно выбрать $11 \cdot 10 = 110$ способами.

b) Капитана и первого ассистента мы уже выбрали $11 \cdot 10$ способами. Для выбора второго ассистента остаётся 9 способов. Поэтому капитана, первого ассистента и второго ассистента можно выбрать $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ способами. ▲

В этой задаче мы фактически нашли число упорядоченных пар и упорядоченных троек, которые можно выбрать из 11−элементного множества. Теперь рассмотрим данный вопрос в общем виде.

Определение. Пусть имеется множество $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, содержащее n элементов. Произвольный упорядоченный набор $(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k})$, составленный из k различных элементов данного множества, называется ***размещением без повторения из n элементов по k элементов****.*

Число таких размещений обозначается A_n^k. Найдём, чему равно это число. Рассуждаем так же, как и в задаче про футболистов. Для выбора первого элемента цепочки имеется n способов, для выбора второго элемента имеется $n-1$ способов, для выбора третьего элемента имеется $n-2$ способов и т. д. Для выбора последнего, k−го элемента цепочки имеется $n-k+1$ способов. Следовательно, $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$

Задача 12. Сколько существует различных семизначных телефонных номеров, в которых ни одна цифра не встречается дважды?

△ Для выбора первой цифры имеется 10 способов (считаем, что цифра 0 тоже учитывается), для выбора второй цифры имеется 9 способов, для выбора третьей – 8 способов, и т.д., и наконец, для выбора последней, седьмой, цифры имеется 4 способа.

Значит, $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$. ▲

Задача 13. Пусть алфавит A состоит из n символов (букв). Количество «слов» (то есть последовательностей символов) длины k, состоящих из различных букв равно $A_n^k = n(n-1)(n-2)....(n-k+1)$. Это следует из предыдущих рассуждений.

Замечание. Если в слове некоторые буквы могут повторяться, то количество таких слов называется ***числом размещений с повторениями из n элементов по k элементов*** *и* обозначается так: $\overline{A_n^k}$ Согласно правилу произведения, это число находится по формуле $\overline{A_n^k} = n^k$.

Задача 14. Натуральное число называется «красивым», если в его десятичной записи встречаются только нечётные цифры. Сколько четырёхзначных красивых чисел существует?

△ Очевидно, что однозначных красивых чисел всего 5 (это нечётные цифры). Мы можем приписать в конец каждого красивого однозначного числа нечётную цифру пятью способами. Значит, всего существует $\overline{A_5^2} = 5 \cdot 5 = 25$ двузначных красивых чисел. Точно также число трёхзначных красивых чисел равно $\overline{A_5^3} = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ а четырёхзначных $\overline{A_5^4} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$. ▲

Задача 15. Сколькими способами можно выложить в ряд красный, черный, синий и зеленый шарики?

△ На первое место можно положить любой из четырех шариков, на второе – любой из трех оставшихся, на третье – любой из двух оставшихся, а на четвертое – последний оставшийся шарик.

Ответ. $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. ▲

Примечание. *Произведение всех натуральных чисел от* 1 *до n обозначается n*! *и читается, как «эн факториал».*

На самом деле $n!$ *означает число перестановок элементов n–элементного множества.*

Задача 16. Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых цифры 1, 2, 3 встречаются ровно по одному разу?

△ На первое место можно поставить любую из трех цифр, на второе – любую из двух оставшихся, а на третье – последнюю оставшуюся цифру. Таким образом, всего получается $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ числа. ▲

Задача 17. Сколькими способами 7 учеников могут разместиться в очереди?

△ На первом месте может оказаться любой из 7 учеников, на втором − любой из 6 (все, кроме уже выбранного первого), на 3−м − любой из 5,..., на последнем месте остается только один кандидат. Итого, по правилу произведения $7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 5040$. ▲

Упражнения

Решите задачи перебором вариантов (**1–4**):

1. Вася, Дима, Олим, Камола и Аня считаются лучшими в классе по математике. Необходимо выбрать одного мальчика и одну девочку для участия на «Смотре знаний». Сколькими способами это можно осуществить?

2. В столовой на первое блюдо можно выбрать борщ, овощной или гороховый суп. На второе можно выбрать гарнир с мясной, рыбной или куриной подливкой. На третье – чай или компот. Сколькими способами можно заказать обед, состоящий из первого, второго и третьего?

3. Галя, Санобар, Коля, Олим, Мадина и Вася учатся на отличные оценки. Руководство школы решило их поощрить и купило 4 билета на концерт. Сколькими способами можно распределить билеты среди этих отличников?

4. Есть 3 белых, 2 красных и 4 жёлтых розы. Сколькими способами из них можно составить букет, состоящий из трёх цветов.

Решите задачи на правила суммы и произведения (**5–10**):

5. На полке стоят девять книг по математике, четыре книги по иностранному языку и шесть книг по родному языку. Сколькими способами можно выбрать с полки одну книгу?

6. В Стране Чудес есть три города: А, Б и В. Из города А в город Б ведет 6 дорог, а из города Б в город В – 4 дороги. Сколькими способами можно проехать от А до В?

7. В магазине есть 7 видов пиджаков, 5 видов брюк и 4 вида галстуков. Сколькими способами можно купить комплект из пиджака, брюк и галстука?

8. В Стране Чудес есть четыре города: А, Б и В и Г. Из города А в город Б ведет 6 дорог, а из города Б в город В – 4 дороги. Из города А в город Г – две дороги, и из города Г в город В – тоже две дороги. Сколькими способами можно проехать от А до В?

9. Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя шести различных цветов?

10. В киоске продаются 5 видов конвертов и 4 вида марок. Сколькими способами можно купить конверт с маркой?

59-60 БИНОМ НЬЮТОНА

Сочетания

Задача 1. Из класса, в котором учатся 30 человек, нужно выбрать двух школьников для участия в математической олимпиаде. Сколькими способами это можно сделать?

△ Первого ученика можно выбрать 30 способами, второго, независимо от выбора первого ученика, 29 способами. При этом каждая пара учитывается дважды. Поэтому всего $\frac{30\cdot 29}{2}=435$ способов.

Ответ. 435. ▲

***Примечание**. В общем случае, количество пар, образованных элементами n –элементного множества, равно* $\frac{n(n-1)}{2}$.

Задача 2. На плоскости дано n точек. Сколько имеется отрезков с концами в этих точках?

Ответ. $\frac{n(n-1)}{2}$.

Задача 3. Сколько диагоналей в выпуклом n − угольнике?

△ *Первый способ.* По предыдущей задаче количество отрезков, соединяющих n вершин, равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Из них n являются сторонами, а не диагоналями. Значит, диагоналей всего $\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2}$.

Второй способ. Из каждой вершины исходит $(n-3)$ диагоналей. Значит, должно быть $n(n-3)$ диагоналей. Однако так как каждая диагональ посчитана дважды, то общее количество диагоналей равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

Ответ. $\frac{n(n-3)}{2}$. ▲

Задача 4. Сколькими способами можно выбрать команду из трех школьников для участия на предметной олимпиаде в классе, в котором учатся 30 человек?

△ Первого ученика можно выбрать 30 способами, второго − 29 способами, третьего − 28 способами. Таким образом, получаем $30\cdot 29\cdot 28$ вариантов выбора. Однако каждая команда при этом подсчете учтена несколько раз: одна и та же тройка учеников может быть выбрана по-разному, например, сначала A, потом B, потом C или сначала C, потом A, потом B и т.д. Поскольку число перестановок из трех элементов равно 3!, то каждая команда учтена нами ровно 6 раз. Поэтому получаем $30 \cdot 29 \cdot 28/6$. ▲

Обобщим задачу.

Пусть команда состоит из k человек и в классе учится n человек. Количество способов выбрать команду называется *числом сочетаний из n элементов по k.*

Подсчитаем число подмножеств n – элементного множества, содержащих ровно k элементов. Число способов выбрать k элементов по-очереди – сначала первый, затем второй и т.д. равно $n(n-1)(n-2)...(n-k+1)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$. *Но каждое из подмножеств мы подсчитали столько раз, сколько есть способов упорядочить к элементов, а это число равно* $k!$. *Поэтому на* $k!$ *надо поделить. Полученные числа называются биномиальными коэффициентами, обозначаются* $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Задача 5. В столярном отделении строительной компании работают 15 плотников. Для установки дверей в многоэтажном доме необходимо выделить трёх плотников. Сколькими способами это можно осуществить?

△ Посчитаем количество сочетаний по формуле. Положим в ней $n=15$, $m=3$ и $C_{15}^3 = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$. Значит, для выбора 3 человек из 15 плотников существует 455 возможностей. ▲

Задача 6. Сколькими способами из 5 книг можно выбрать 3?

△ По определению биномиальных коэффициентов C_5^3 способами. ▲

Задача 7. Сколькими способами можно разрезать ожерелье, состоящее из 30 различных бусин на 8 частей (разрезать можно только между бусинами)?

△ Нужно отметить 8 мест из 30, в которых будут произведены разрезы. Количество таких способов равно C_{30}^8 . *Ответ.* C_{30}^8 ▲

Задача 8. Сколькими способами можно выбрать из 7 человек комиссию из 3 человек и ее председателя (из числа членов комиссии)?

△ Число способов выбрать комиссию из трех человек равно C_7^3 и для каждого из них есть 3 способа выбрать председателя.

Ответ. $3C_7^3$. ▲

Бином Ньютона

Вспомним формулы сокращенного умножения:

$(a+b)^2 = a^2+2b+b^2$ – квадрат суммы двух чисел;

$(a+b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3b^2+b^3$ – куб суммы двух чисел.

Продолжив далее, найдем 4-и 5-ую степени суммы двух чисел:

$(a+b)^4 = (a + b)(a + b)^3 = (a + b)(a^3 + 3a^2b + 3b^2 + b^3) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4a^3 + b^4$, $(a+b)^5 = (a + b)(a + b)^4 = a^5 + 5a^4b + 0\ a^3b^2 + 0\ a^2b^3 + 5b^4 + b^5$.

В итоге можно получить формулу для всех действительных *a и b и натурального n*

$$(a+b)n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n$$

Эта формула называется формулой **бинома Ньютона**.

Приведем некоторые свойства биномиальных коэффициентов.

1-е свойство. *Для любого натурального n сумма всех биномиальных коэффициентов* C_n^m *равна* 2^n, *то есть*

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Это равенство можно получить, положив в формуле бинома Ньютона $a = b = 1$.

Из этого равенства следует, что количество всех подмножеств заданного множества равно 2^n.

2-е свойство. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на чётных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечётных местах, *то есть*

$$C_n^0 + C_n^2 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + \ldots$$

Действительно, положив в формуле бинома Ньютона $a = 1$ и $b = -1$, получим равенство

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n.$$

Из него сразу следует верность утверждения.

Из вышеуказанных свойств 1 и 2 можно получить следующее свойство.

3-е свойство. *Для наибольшего нечётного m, не превосходящего n, справедливо равенство* $C_n^1 + C_n^3 + \ldots + C_n^m = 2^{n-1}$. *Точно также для наи-*

большего чётного m, не превосходящего n, справедливо равенство $C_n^0 + C_n^2 + ... + C_n^m = 2^{n-1}$.

Упражнения

11. На шахматном соревновании каждый участник играет с каждым другим участником ровно один раз. Сколько игр будет сыграно, если участвуют 18 игроков?

12. На плоскости провели n прямых так, что никакие две из них не параллельны и никакие три из них не проходят через одну общую точку. Сколько треугольников образуют эти прямые?

13. Сколькими способами можно выбрать 4 краски из имеющихся 7 различных?

14. На прямой отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой − 11 точек. Сколько существует a) треугольников; b) четырехугольников с вершинами в этих точках?

15. На двух параллельных прямых a и b выбраны точки $A_1, A_2, ..., A_m$ и $B_1, B_2, ..., B_n$ соответственно. Сколько будет точек пересечения, если провести все отрезки вида A_iB_j, если известно, что никакие три из этих отрезков в одной точке не пересекаются?

16. Найдите максимальное количество точек пересечения n прямых.

17. Пусть задано 100-элементное множество. Сравните число 40 – элементных и 60-элементных подмножеств этого множества.

18*. В биномиальном разложении $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ отношение коэффициента пятого члена к коэффициенту третьего члена равно 7:2.

Найдите член, в котором участвует x.

19*. В биномиальном разложении $\left(x\sqrt{x} - \frac{1}{x^4}\right)^n$ коэффициент третьего члена больше коэффициента второго члена на 44. Найдите свободный член.

20*. В биномиальном разложении $\left(\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}$ найдите все рациональные члены.

21. Найдите коэффициент при x^5 для многочлена
$x(2-3x)^5 + x^3(1+2x^2)^7 - x^4(3+2x^3)^9$.

22. Выпишите биномиальное разложение $(a-\sqrt{2})^6$.

61–64 СТАТИСТИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Пример 1. Предположим, что необходимо проверить соответствие продукции, производимой фирмой, некоторому утверждённому качественному или количественному показателю. Как выполнить это задание?

Предположим для определённости, что нас интересует, какова доля некачественной продукции среди мясных консервов, закатанных в консервные банки. Хорошо бы вскрыть каждую из них и проверить.

Но, к сожалению, в случае большого числа единиц продукции, нецелесообразно, а порой и невозможно, провести такую массовую тотальную проверку, которая может потребовать привлечение дополнительной рабочей силы, времени и иных ресурсов. А в некоторых случаях (например, проверка средней массы содержимого упакованной скоропортящейся продукции растительного или животного происхождения, времени безотказной работы электроприборов и др.) проверка может привести к порче изделия.

В таких случаях вместо того, чтобы проверять всю продукцию, случайным образом, наугад, выбирают несколько экземпляров, и проверяют только их. Такой метод проверки называется *выборочным наблюдением.*

Так, в случае определения средней массы содержимого мясных консервов выбираются, скажем, 200 банок, выписывается соответствующий ряд чисел $(x_1, x_2, ..., x_{200})$ и определяется его среднее значение $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_{200}}{200}$ После делается заключение, что полученное значение *приблизительно равно* средней массе всех консервов.

Метод выборочного наблюдения повсеместно используется для анализа данных о социально-экономическом состоянии государства, об основных демографических показателях, показателях занятости населения, уровне его благосостояния, а также о показателях, характеризующих образование, здравоохранение, культуру, рынок услуг, товарное производство, транспортные и информационные коммуникации.

Совокупность (множество) всех объектов, подлежащих изучению, называется **генеральной совокупностью.** Множество объектов, выбранных из генеральной совокупности, называется **выборкой**.

Совокупность качественных или количественных показателей, характеризующих каждый элемент этих множеств, называется ***статистическими данными***.

Ряд статистических данных не обязательно должен иметь числовую природу. Например, при изучении моделей, цвета кузова автомобилей, приходится иметь дело со статистическими данными, имеющими нечисловую природу.

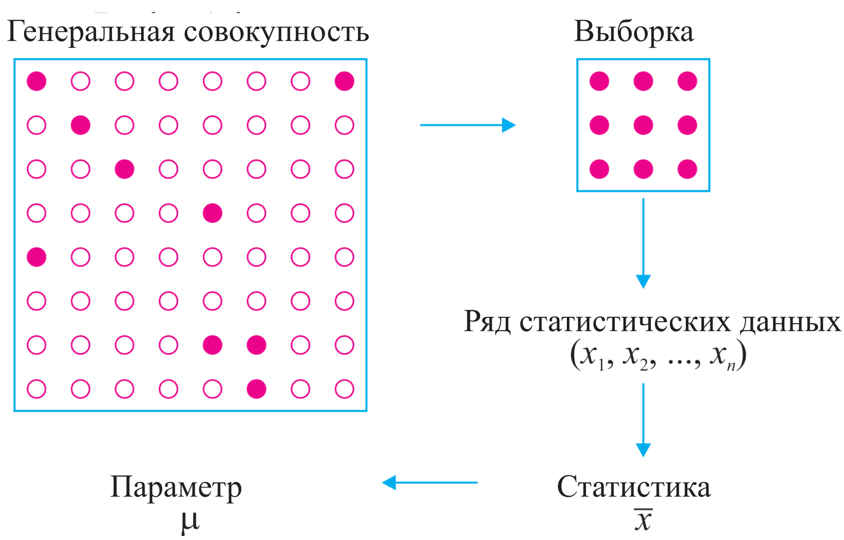
Статистические данные, имеющие нечисловую природу, называются **квалитативными** (анг.quality – качество), а числовые статистические данные называются **квантитативными** (анг. quantum – величина).

Обычно квантитативные статистические данные образуют числовую последовательность (ряд).

Показатель, характеризующий каждый элемент генеральной совокупности, называется её **параметром,** а соответствующий показатель выборки – **статистикой.**

В случае, когда статистика имееет числовой характер, её также называют **статистической величиной**.

В примере 1 обозначим среднюю массу всех консервов через μ – которая является примером параметра. При этом средняя масса консервов $\overline{x}$ из выборки служит примером статистики. Отметим, что при определенных условиях можно оценить параметр исходя из значения статистики.



Термин статистика в широком смысле означает науку, изучающую методы получения научных и практических выводов на основе сбора, систематизации и обработки статистических данных.

[1] статистика (лат. stato — государство; status — состояние)

Вопросы и задания

1. Объясните понятия генеральной совокупности, выборки.

2. Объясните понятия параметра, статистики. Приведите примеры.

3. В каких случаях удобно использовать метод выборочного наблюдения для определения:

a) средней урожайности яблоневых деревьев в саду;

b) цвета кузова и моделей автомобилей в Узбекистане;

c) цвета кузова и моделей автомобилей в вашем квартале;

d) средней оценки по математике учащихся Узбекистана;

e) средней оценки по математике учащихся вашей школы;

f) средней оценки по математике ваших друзей;

g) пола посетителей театра;

h) средней массы учеников, проходящих медицинский осмотр.

4. Приведите пример генеральной совокупности, обладающей двумя различными качественными характеристиками.

5. Какие из следующих статистических данных являются квантитативными, а какие квалитативными:

a) пол первых 40 больных, поступивших в больницу в этом году;

b) цвет волос 20 учеников, выбранных случайным образом;

c) возраст 20 учеников, выбранных случайным образом;

d) показатель расхода топлива выпущенных в этом месяце 20 автомобилей;

e) принадлежность к политической партии 100 избирателей, выбранных случайным образом.

6. Предприниматель определил, что в заданный день каждый посетитель супермаркета затратил на покупки в среднем 57000 сум.

a) какую генеральную совокупность рассматривал предприниматель?

b) какой параметр он изучал?

c) если бы предприниматель использовал выборочное наблюдение, какую статистику он бы рассматривал? Чему может быть равна эта статистика?

7. Исследователь в области медицины хочет оценить среднюю массу новорожденных. Для этого он взвесил 235 новорожденных и определил, что средняя их масса равна 3 кг 270 г.

a) какую генеральную совокупность рассматривал исследователь?

b) какой параметр он изучал?

c) какую статистику имеет выборка? Чему она равна?

d) можете ли вы точно сказать, чему равен параметр?

8. Социолог хочет оценить долю девочек, занимающихся спортом. Для этого он случайным образом выбрал 1320 девочек и путем опроса определил, что 145 из них (то есть приблизительно 11%) занимаются спортом.

a) какую генеральную совокупность рассматривал социолог?

b) какой параметр он изучал?

c) какую статистику имеет выборка? Чему она равна?

d) можете ли вы точно сказать, чему равен параметр?

В дальнейшем мы будем рассматривать только квантитативные статистические данные. Ясно, что статистический ряд выборки образует в данном случает конечное числовое множество.

Объёмом выборки или генеральной совокупности называется количество объектов, составляющих данные множества.

Например, если в случае примера 1 для проверки качества 10000 консервных банок выбрали 200, то объём генеральной совокупности равен $N = 10000$, а объём выборки $n = 200$.

Каждый элемент выборки называется **вариантой,** а упорядоченная выборка называется **вариационным** рядом.

Пусть в выборке значение x_1 повторяется n_1 раз, значение x_2 повторяется n_2 раза, ... , значение x_k повторяется n_k раза. Число n_i называется **частотой** варианты x_i, а число $\frac{n_i}{n}$ – **абсолютной частотой** этой варианты.

Здесь объём выборки равен $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

Статистические данные могут подвергаться следующей *первичной обработке:*

1) составляется вариационный ряд;
2) составляется соответствующая таблица частот;
3) строится полигон частот;
4) строится гистограмма.

Пример 2. Для изучения квалификационных разрядов рабочих фирмы экономист изучил личные дела 20 рабочих и составил ряд данных: 4; 4; 3; 2; 5; 2; 3; 5; 4; 3; 3; 2; 5; 4; 5; 4; 6; 3; 4; 5.

После чего он упорядочил эти данные по возрастанию и получил вариационный ряд: 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6.

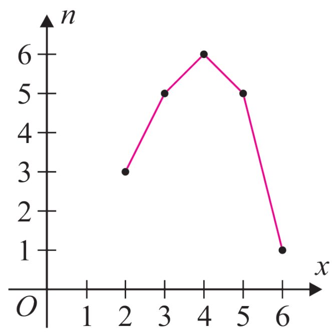
В этом вариационном ряду $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = 4$; $x_5 = 5$; $x_6 = 6$ — варианты; частота варианты x_1 равна 3; варианты x_2 равна 5; x_3 равна 6; x_4 равна 5; x_5 равна 1. Кроме того, отметим, что здесь относительная частота варианты x_1 равна $\dfrac{3}{20} = 15\%$; варианты x_2 равна $\dfrac{5}{20} = 25\%$.

Опираясь на полученное, экономист составил таблицу частот:

Разряд x_i	2	3	4	5	6
Число рабочих p_i	3	5	6	5	1

Затем на координатной плоскости была построена ломаная с вершинами в точках (2,3), (3,5), (4,6), (5,5) и (6,1):

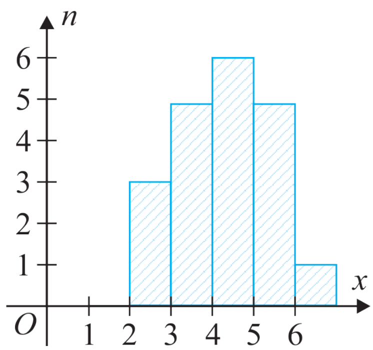
Полигон частот



В общем случае **полигоном частот** называется ломаная с вершинами в точках $(x_1;n_1)$, $(x_2;n_2)$, …, (x_k,n_k) **Полигоном относительных частот** называется ломаная с вершинами в точках $(x_1, \omega_1), (x_2, \omega_2)$, …, (x_k, ω_k), где $\omega_1 = \dfrac{n_1}{n}$, $\omega_2 = \dfrac{n_2}{n}$, …, $\omega_k = \dfrac{n_k}{n}$ – относительные частоты.

Наконец, экономист построил прямоугольники с основаниями [2,3], [3,4], [4,5], [5,6], [6,7] и высотами, равными соответствующим частотам 3; 5; 6; 5; 1. Полученная фигура называется **гистограммой**.

Гистограмма

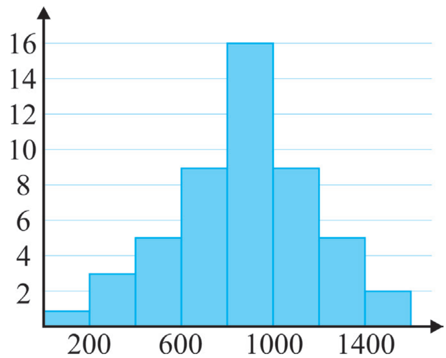


В случае, когда ряд данных имеет большой объём, причём повторяющихся значений немного, построение таблицы частот сопряжено с определёнными трудностями. В этом случае для анализа данных выписывается несколько интервалов одинаковой длины, содержащих эти данные. Затем подсчитывается количество вариант, принадлежащих каждому интервалу (их мы также будем называть частотами) и составляется соответствующая таблица частот.

Пример 3. Для определения срока службы электроприборов изучена выборка объёмом, равным 50. Результаты изучения внесены в следующую таблицу:

Период безотказной работы, дни	Частота
200	1
200 – 400	3
400 – 600	5
600 – 800	9
800 – 1000	16
1000 – 1200	9
1200 – 1400	5
1400–1600	2

Построим гистограмму, состоящую из прямоугольников с основаниями в соответствующих отрезках и высотами, равными частотам.

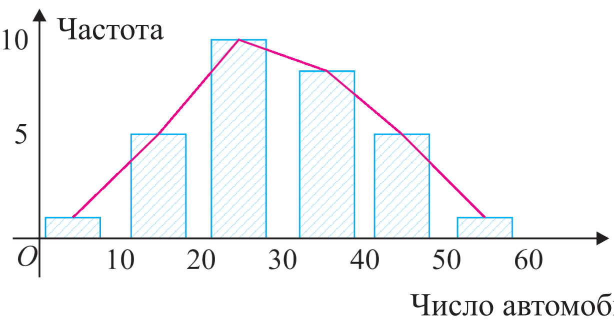


Пример 4. Во время месячника дорожной безопасности Олег ежедневно подсчитывал число автомобилей, проезжающих возле ворот школы в период с 7.45 до 8.00 часов. Результаты наблюдений были внесены в таблицу:

Число автомобилей	Подсчёт	Частота	Относительная частота
0 – 9	|	1	0,033
10 – 19	~~||||~~	5	0,167
20 – 29	~~||||~~ ~~||||~~	10	0,333
30 – 39	~~||||~~ ||||	9	0,3
40 – 49	||||	4	0,133
50 – 59	|	1	0,033
Всего		30	

Помогите Олегу составить гистограмму и полигон частот.

△ Построим гистограмму, состоящую из прямоугольников с основаниями в соответствующих отрезках и высотами, равными частотам. После этого, соединив середины верхних оснований прямоугольников отрезками, получим полигон частот:



▲

Упражнения

В следующих упражнениях представьте данные в виде полигона и гистограммы. Какая варианта встречается чаще всех?

23. Школьная команда по футболу за каждую игру забила в ворота соперника следующее число мячей:

2	0	1	4	0	1	2	1	1	0	3	1
3	0	1	1	6	2	1	3	1	2	0	2

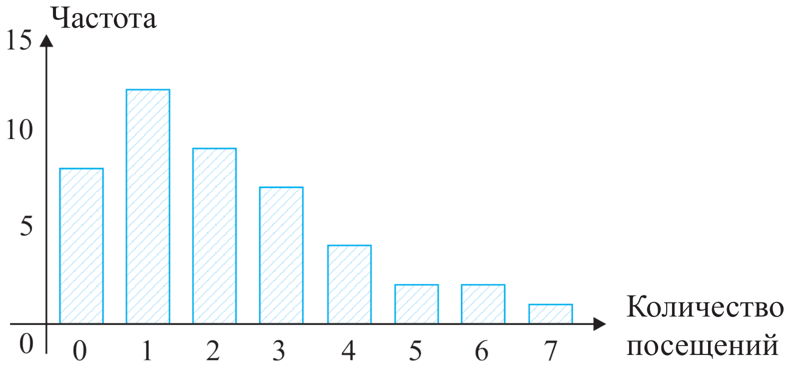
24. В таблице приведено количество отличных оценок, полученное 40 учениками за последнюю неделю:

0	2	1	5	0	1	4	2	3	1
4	3	0	2	9	2	1	5	0	3
6	4	2	1	5	1	0	2	1	4
3	1	2	0	4	3	2	1	2	3

25. В таблице приведено количество правильных ответов учеников в тестах, состоящих из 10 вопросов:

5	7	6	4	6	5	6	7	5	8
7	6	9	8	7	6	6	9	6	7
6	4	7	5	8	7	6	8	7	8
5	6	9	7						

26. Маркетолог задавал вопрос «Сколько раз в эту неделю вы делали покупки в магазине?» случайным прохожим и затем представил результаты в следующем виде:



a) Какая варианта встретилась чаще всего?

b) К каким выводам можно прийти?

c) Сколько людей не делали покупки в эту неделю?

d) Сколько процентов людей заходило более 3-х раз в магазин за покупками?

f) Составьте таблицу частот.

27. Самандар ездит в школу автобусом. В течение 30 дней он подсчитывал число пассажиров в автобусе и получил следующие данные:

17	25	32	19	54	30	22	15	38	8
21	29	37	25	42	35	19	31	26	7
22	11	27	44	24	22	32	18	40	29

a) Составьте таблицу частот, соответствующую интервалам 0-9, 10-19,..., 40-49.

b) Сколько дней число пассажиров было менее 10 человек?

c) Сколько процентов от всех дней составляет количество дней, когда пассажиров было более 30 человек?

d) Постройте полигон и гистограмму.

f) Когда наблюдалось наибольшее число пассажиров?

28. Выберите понравившееся стихотворение в вашем учебнике по литературе и подсчитайте число гласных. Составьте соответствующие полигон частот и гистограмму. Какая гласная встретилась больше всего? Сравните свои результаты с результатами других одноклассников.

Гласная	А	Е	И	О	У	Я
Результат подсчёта						

65-67 СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ, МОДА И МЕДИАНА. ОТКЛОНЕНИЕ, СТАНДАРТНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ

Среднее, мода и медиана

Ранее нами были даны примеры *статистических величин и характеристик*.

Следующие статистические характеристики характеризуют в известном смысле *центры*. Рассмотрим примеры, характеризующие эти понятия (чаще употребляют термин *центральные тенденции*) статистического ряда: *среднее значение, мода и медиана.*

$$\textit{среднее значение} = \frac{\textit{сумма членов ряда данных}}{\textit{число членов ряда данных}}.$$

Пример 1. Выбрали 12 учеников 11-х классов и измерили их рост в сантиметрах: 168, 159, 181, 172, 161, 163, 164, 170, 169, 154, 168, 175.

Чему равен средний рост учеников?

Сколько учеников выше среднего роста?

△ Сложив результаты измерений, поделим результат на число учеников:

$$(168+159+181+172+161+163+164+170+169+154+168+175):12=167.$$

Значит, средний рост учеников составляет 167 см, причем 7 учеников оказались выше 167 см. ▲

Размахом выборки называется разность между наибольшей и наименьшей вариантой.

Например, размах вышеуказанного ряда данных о росте учеников равен 181-154=27 см.

Пример 2. За учебную четверть ученик получил по математике следующие оценки : 5, 3, 4, 2, 5, 5, 4, 3, 3, 5.

Так как его средняя оценка равна $\frac{5+3+4+2+5+5+4+3+3+5}{10} = 3{,}9$ то он получил в качестве четвертной оценку «4». Видно, что шесть оценок в ряду больше средней оценки. В то же время ученик получал пятёрки чаще других оценок.

Среднее, как было отмечено, характеризует *центр* ряда данных. Отметим, что это среднее значение не обязано принадлежать ряду данных.

Например, если средний результат пробных тестовых испытаний учеников школы равен 75%, то некоторые ученики могут получить выше 75% баллов, а некоторые – ниже. В то же время ни один ученик может не показать результат в 75% . Среднее x выборки $x_1, x_2, ..., x_n$ вычисляется по формуле $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ здесь n – объём выборки, $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_n$

Варианта, которая встречается в *ряду данных* чаще всего (то есть имеет наибольшую частоту) называется *модой ряда данных*. Например, во 2-м примере мода равна 5.

Задание. Выпишите все ваши оценки, полученные по математике в течение этой четверти. Найдите среднее и моду полученного ряда данных. К какому выводу можно прийти?

Если число – вариант ряда данных нечётно, то медианой называется число, стоящее по середине соответствующего вариационного ряда.

Если число – вариант ряда данных чётно, то медианой называется среднее арифметическое двух чисел, стоящих по середине соответствующего вариационного ряда.

Таким образом, для нахождения медианы выборки $x_1, x_2, ..., x_n$ необходимо сначала упорядочить числа $x_1, x_2, ..., x_n$ по возрастанию, то есть составить вариационный ряд. Затем находится число $\frac{n+1}{2}$.

Если число $\frac{n+1}{2}$ целое, то есть если n – нечётно, то медианой является $\frac{n+1}{2}$-ый член вариационного ряда. $\frac{n+1}{2}$ Если число не целое, то есть если n – чётно, то медианой является среднее арифметическое $\frac{n}{2}$-го и $\frac{n+2}{2}$-го членов вариационного ряда.

Например, если $n=13$, то $\frac{n+1}{2} = \frac{13+1}{2} = 7$ В этом случае медиана равна 7-ой варианте вариационного ряда.

Если же $n=14$, то $\frac{n+1}{2} = \frac{14+1}{2} = 7{,}5$ В этом случае медиана равна среднему арифметическому 7 – го и 8 – го членов вариационного ряда.

Медиана «делит» вариационный ряд на две равные по объёму части. Из них первая часть состоит из вариант, меньших медианы, а вторая – из больших.

Например, если медиана результатов пробных тестовых испытаний учеников школы равна 75%, то количество учеников, получивших не более 75%, составляет половину количества всех учеников.

Пример 3. Найдите среднее, моду и медиану ряда данных:
a) 3, 6, 5, 6, 4, 5, 5, 6, 7; b) 13, 12, 15, 13, 18, 14, 16, 15, 15, 17.

△ a) среднее: $\dfrac{3+6+5+6+4+5+5+6+7}{9}=\dfrac{47}{9}\approx 5{,}2$

Этот ряд имеет две моды: 5 и 6 (они повторяются по три раза).
$n+1$.

Так как $n=9$, то $\dfrac{n+1}{2}=5$, найдем средний член вариационного ряда, последовательно вычеркивая крайние члены: ~~3, 4, 5, 5~~, **5**, ~~6, 6, 7~~.

Значит, медиана равна 5.

b) среднее: $\bar{x}=\dfrac{13+12+15+13+18+14+16+15+15+17}{10}=\dfrac{148}{10}=14{,}8$

Этот ряд составляет одну моду: 15 $n=10$, так как $\dfrac{n+1}{2}=5{,}5$, то то составляя вариационный ряд, найдем два средних члена, последовательно вычеркивая крайние: ~~12, 13, 13, 14~~, **15, 15,** ~~15, 16, 17, 18~~.

Значит, медиана равна 15.

Упражнения

29. Найдите моду, медиану и среднее ряда данных.
a) 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9.
b) 10, 12, 12, 15, 15, 16, 16, 17, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 21.
c) 22,4, 24,6, 21,8, 26,4, 24,9, 25,0, 23,5, 26,1, 25,3, 29,5, 23,5.

30. Пусть заданы два ряда данных:
A: 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 10;
B: 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 15.

a) найдите средние значения.
b) найдите медианы.
d) почему среднее ряда *A* меньше среднего ряда *B*?
c) почему медиана ряда *A* равна медиане ряда *B*?

31. Два спортсмена показали на соревнованиях следующие результаты:

160, 175, 142, 137, 151, 144, 169, 182, 175, 155;
157, 181, 164, 142, 195, 188, 150, 147, 168, 148.

Какой из них достиг большего результата?

32. Олег в течение 15 дней ежедневно выписывал число съеденных им яблок: 2, 3, 1, 1, 0, 0, 4, 3, 0, 1, 2, 3, 2, 1, 4. Найдите:

a) моду; b) среднее; c) медиану.

33. Школьная баскетбольная команда в 4-х матчах забросила 43, 55, 41 и 37 мячей.

a) найдите средний результат команды.

b) какой результат нужно показать в следующей, пятой игре, чтобы сохранить средний результат?

c) как изменится средний результат, если в пятой игре было заброшено 25 мячей?

d) команда забросила в 6–ой игре 41 мяч. Как изменился средний результат? Чему он равен?

Вопросы и задания.

1. Какие статистические характеристики вы знаете?
2. Какой смысл моды?
3. Как можно найти медиану заданных чисел?

Если члены выборки x_1, x_2, ..., x_k имеют соответственно частоты. n_1, n_2, ..., n_k, причем $n_1+n_2+....+n_k=n$, то в этом случае среднее выборки находится по формуле

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k}{n} \qquad (2)$$

или

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_ix_i .$$

Пример 4. Рассмотрим данные, заданные в виде:

Значение (x_i)	Частота (n_i)
3	1
4	1
5	3
6	7
7	15
8	8
9	5
Всего	$\sum n_i = 40$

Для нахождения среднего значения добавим к этой таблице ещё один столбец и выпишем в него произведения $n_i x_i$. Затем выполним соответствующие вычисления:

Значение (x_i)	Частота (n_i)	Произведение ($n_i x_i$)
3	1	$1 \cdot 3=3$
4	1	$1 \cdot 4=4$
5	3	$3 \cdot 5=15$
6	7	$7 \cdot 6=42$
7	15	$15 \cdot 7=105$
8	8	$8 \cdot 8=64$
9	5	$5 \cdot 9=45$
Всего	$\sum n_i = 40$	$\sum n_i x_i = 278$

Значит, среднее равно $\dfrac{278}{40} = 6{,}95$.

Найдём теперь медиану. Так как объём выборки равен 40, то $\dfrac{n+1}{2} = \dfrac{41}{2} = 20{,}5$. Значит, медиана равна среднему арифметическому 20-й и 21-й вариант.

Для того, чтобы найти её значение, составим таблицу:

Значение	Частота	Сумма частот	Примечание
3	1	1	Один член равен 3
4	1	1+1=2	2 члена не больше 4
5	3	2+3=5	5 членов не больше 5
6	7	5+7=12	12 членов не больше 6

7	15	12+15=27	27 членов не больше 7
8	8	27+8=35	35 членов не больше 8
9	5	35+5=40	Все 40 членов не больше 9
Всего			

Из таблицы видно, что обе 20-ая и 21-ая варианты равны 7.

Значит, медиана равна $\frac{7+7}{2}=7$.

Пример 5. На международном соревновании по теннису представитель Узбекистана во время игры заработал несколько эйсов:

Число эйсов	1	2	3	4	5	6
Частота	4	11	18	13	7	2

a) найдите среднее число эйсов

b) найдите медиану эйсов

c) найдите моду

△ Составим таблицу:

Число эйсов (x_i)	Частота (n_i)	Произведение $(n_i x_i)$	Сумма частот
1	4	4	4
2	11	22	15
3	18	54	33
4	13	52	46
5	7	35	53
6	2	12	55
Всего	$\sum n_i=55$	$\sum n_i x_i=179$	

$$\text{a)}\ \bar{x}=\frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}=\frac{179}{55}\approx 3,25$$

Число эйсов в среднем равно 3,25.

b) так как n=55, то $\frac{n+1}{2}=28$. Значит, медиана совпадает с 28-ым членом.

Из таблицы видно, что все члены с 16-го по 33-ий равны 3. Это означает, что медиана тоже равна 3.

c) так как наибольшая частота равна 18, то соответствующее число эйсов равно 3.

Упражнения

34. В следующей таблице приведены результаты одновременного бросания трёх монет.

Число гербов	Сколько раз наблюдалось
0	4
1	12
2	11
3	3
Всего	30

Согласно этим данным найдите:

a) моду; b) медиану;

c) среднее; d) попробуйте и вы осуществить такой же опыт с тремя монетами? Какие результаты вы получили?

35. В следующей таблице приведено ежедневное количество обращений к директору школы:

Число обращений за день	0	1	2	3	4	5	6	7	8	11
Частота	5	8	13	8	6	3	3	2	1	1

a) найдите моду, медиану и среднее;

b) построив гистограмму, покажите, где находятся мода, медиана и среднее;

c) почему среднее значение больше медианы?

d) какую статистическую величину вы выбрали бы в качестве центральной тенденции? Поясните свой ответ.

36. Согласно утверждённым техническим условиям в каждой спичечной коробке, производимой фирмой, должно быть в среднем 50 спичек. Комиссия по контролю за качеством выбрало 30 коробок и пересчитало количество спичек в каждой из них. Результаты пересчёта были внесены в следующую таблицу:

Число спичек в коробке	Частота
47	5
48	4
49	11
50	6
51	3
52	1
Всего	30

a) найдите моду, медиану и среднее;

b) соблюдает ли фирма технические условия? Почему?

37. Самандар определил количество детей в 59 семьях соседей и составил таблицу:

Число детей в семье	Частота
1	5
2	28
3	15
4	8
5	2
6	1
Всего	59

Помогите Самандару найти моду, медиану и среднее.

Когда статистические данные сгруппированы по интервалам, среднее значение точно найти не удаётся. Для нахождения приближённого значения среднего берутся середины каждого интервала. Рассмотрим иллюстративный пример.

Пример 6. Работники фирмы распределены по возрасту следующим образом:

Возраст	21 – 25	26 – 30	31 – 35	36 – 40	41 – 45	46 – 50	51 – 55
Частота	11	14	32	27	29	17	7

Для нахождения приближенного значения среднего возраста составим таблицу:

Возраст (года)	Частота (n_i)	Середина интервала (x_i)	$n_i x_i$
21 – 25	11	23	253
26 – 30	14	28	392
31 – 35	32	33	1056
36 – 40	27	38	1026
41 – 45	29	43	1247
46 – 50	17	48	816
51 – 55	7	53	371
Всего	$\sum n_i = 137$		$\sum n_i x_i = 5161$

Отсюда
$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{5161}{137} \approx 37{,}7$$

Значит, средний возраст работников фирмы составляет приблизительно 37,7 лет.

Упражнения.

38. В таблице приведены результаты тестовых испытаний учащихся:

Баллы	0 – 9	10 – 19	20 – 29	30 – 39	40 – 49
Частота	2	5	7	27	9

Найдите приближённое значение среднего.

39. В таблице приведены сведения о проданном топливе заправочными станциями за день:

Объём (литры)	Частота
2000 – 2999	4
3000 – 3999	4
4000 – 4999	9
5000 – 5999	14
6000 – 6999	23
7000 – 7999	16

a) сколько станций было изучено?

b) какое количество топлива было отпущено всего за день?

c) какое количество топлива продавалось в среднем за день?

40. Ниже приведены сведения о заброшенных мечах в нескольких матчах:

15	8	6	10	0	9	2	16	11	14	13	17	16	12
3	13	5	18	14	19	4	15	15	19	19	14	6	11
9	7	15	19	12	17	14	13	12	10	6	8	9	3

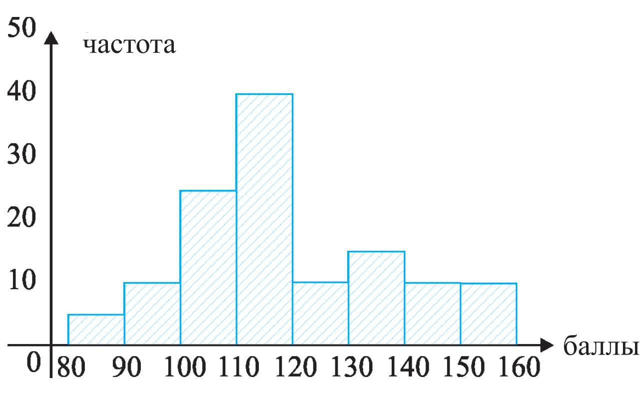
a) сколько мячей за игру в среднем было заброшено?

b) сгруппируйте данные по следующим интервалам. Найдите приближённое значение среднего и сравните его с действительным средним:

I) 0 – 4, 5 – 9, 10 – 14, 15 – 19;

II) 0 – 3, 4 – 7, 8 – 11, 12 – 15, 16 – 19.

41. На следующей гистограмме приведены сведения о результатах тестовых испытаний:



a) сколько учеников участвовало в испытаниях?

b) оцените средний балл;

c) найдите долю учеников, получивших результат выше 100 баллов;

d) предположим, что 20% учеников должны получить вознаграждение. Какой минимальный балл соответствует вознаграждению?

Отклонение, стандартное отклонение. Мода, медиана и среднее показывают наиболее характерное значение для статистических данных. Однако в большинстве случаев этого недостаточно для анализа данных, так как изменчивость, неодинаковость статистических данных являются основными свойствами множества данных.

Если бы изменчивости не было, то информацию о статистическом ряде можно было бы получить, опираясь на один элемент ряда данных. В случае наличия изменчивости для получения информации о статистическом ряде нужно учитывать характер и степень этой изменчивости.

В вышеуказанных примерах мы наблюдали, что приведенные данные более или менее отклоняются от среднего. Это отклонение показывает, насколько изменчивы показатели данных.

Для характеризации степени отклонения наблюдаемых данных от среднего значения служит *стандартное отклонение.*

Пусть $\overline{x}$ среднее выборки $x_1, x_2, ..., x_n$. **Стандартным отклонением** выборки называется число

$$s_n = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n}} \quad \text{или} \quad s_n = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}}\ .$$

При этом выражение $(x_i-\overline{x})^2$ показывает, на сколько показатель x_i отклонён от среднего $\overline{x}$, выражение $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ – суммарное отклонение, а выражение $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}$ характеризует среднее отклонение. Взятие квадратного корня обеспечивает соответствие единицы измерения среднего отклонения с единицей измерения данных.

Пример 7. Найдите стандартное отклонение ряда 2, 5, 4, 6, 7, 5, 6.

△ Вычислим среднее $\overline{x} = \dfrac{2+5+4+6+7+5+6}{7} = 5$ и составим следующую таблицу:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
2	–3	9
4	–1	1
5	0	0
5	0	0
6	1	1
6	1	1
7	2	4
35		16

Вычислим стандартное отклонение:

$$s_n = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{16}{7}} \approx 1{,}51$$

В случае, когда в выборке объёма n значения x_1, x_2, ..., x_k имеют частоты n_1, n_2, ..., n_k, соответственно, стандартное отклонение можно найти по формуле

$$s_n = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + n_k(x_k - \bar{x})^2}{n}}$$

или $\quad s_n = \sqrt{\dfrac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum n_i}}$.

8 пример. Пусть задана таблица частот выборки:

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Найдите стандартное отклонение.

△ $$\bar{x} = \frac{20 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{20 + 15 + 10 + 5} = \frac{100}{50} = 2$$

Теперь заполним таблицу:

(x_i)	(n_i)	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i\,(x_i - \bar{x})^2$
1	20	–1	1	20
2	15	0	0	0
3	10	1	1	10
4	5	2	4	20
Всего:	50			50

Значит, $s_n = \sqrt{\dfrac{20 + 0 + 10 + 20}{20 + 15 + 10 + 5}} = 1$

Упражнения

42. Ниже приведены данные о недельном расходовании топлива автомобилями, принадлежащими организации:

62, 40, 52, 48, 64, 55, 44, 75, 40, 68, 60, 42, 70, 49, 56

Найдите стандартное отклонение этого ряда данных.

43. Фермер выбрал наугад несколько яблок со своего яблоневого сада, взвесил их и получил выборку,

87, 75, 68, 69, 81, 89, 73, 66, 91, 77, 84, 83, 77, 84, 80, 76, 67

Найдите среднее и стандартное отклонение этого ряда данных.

Что вы можете сказать о них?

44. Вася определил количество детей в семьях соседей и составил следующую таблицу:

Число детей в семье (x)	0	1	2	3	4	5	6	7
частота (n_i)	14	18	13	5	3	2	2	1

Найдите среднее и стандартное отклонение этого ряда данных.

45. В следующей таблице приведены данные о возрасте участников соревнования:

Возраст	11	12	13	14	15	16	17	18
Частота	2	1	4	5	6	4	2	1

Найдите средний возраст участников и стандартное отклонение этого ряда данных.

46. Районная поликлиника еженедельно в течение года определяла количество обратившихся граждан и составила следующую таблицу:

Число обратившихся	Частота
36	2
39	5
44	9
45	11
46	15
48	5
50	4
52	1
Всего:	52

Найдите среднее число обращений в неделю и стандартное отклонение этого ряда данных.

68–70 ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ДВУХ РЯДОВ ДАННЫХ

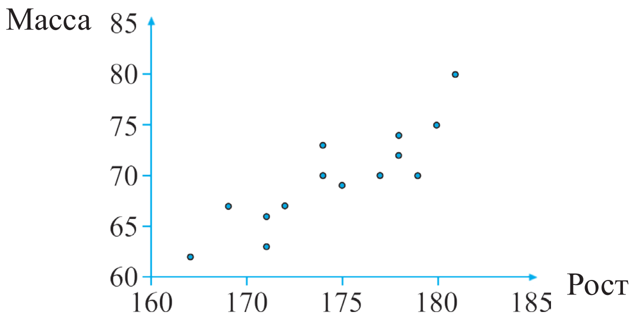
Диаграммы рассеяния. В практических задачах, имеющих место в повседневной жизни, полезно знать, есть ли некоторая связь между изучаемыми величинами. Разобраться в этом помогает *диаграмма рассеяния*.

Пример 1. Есть ли связь между ростом и весом человека?

△ Для ответа на этот вопрос выбраны 15 юношей и определены рост и масса каждого. В результате получена следующая таблица:

Рост, см	167	169	179	178	177	175	171	181	174	175	180	174	172	178	171
Масса, кг	62	67	70	72	70	69	63	80	73	66	75	70	67	74	66

В декартовой системе координат отметим точки (167; 62)..., (171; 66), абсциссы которых — рост, а ординаты — соответствующая масса и получим диаграмму рассеяния:



Из диаграммы видно, что люди с примерно одинаковым весом могут иметь разный рост, а с почти одинаковым ростом — разный вес, т. е. между этими величинами нет жесткой связи. Однако в целом вес человека тем больше, чем больше его рост. ▲

Диаграмма рассеивания показывает примерный характер взаимосвязи между двумя рядами данных.

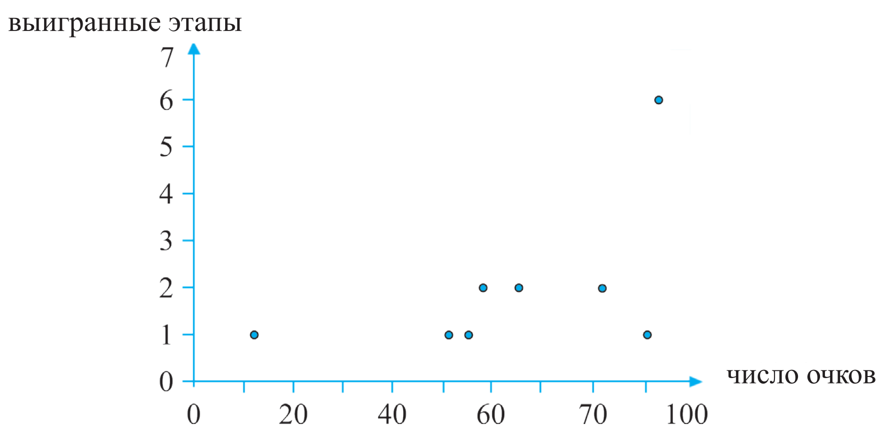
Пример 2. В следующей таблице приведены данные о числе выигранных этапов в Гран-при «Формулы-1» и количестве очков, набранных автогонщиком по итогам всех этапов.

Автогонщик	Число выигранных этапов	Число очков	Место
М. Шумахер	6	93	1
К. Райкконен	1	91	2

Х. П. Монтойя	2	82	3
Р. Баррикелло	2	65	3
Р. Шумахер	2	58	5
Ф. Алонсо	1	55	6
Д. Култхарт	1	51	7
Д. Физикелла	1	12	12

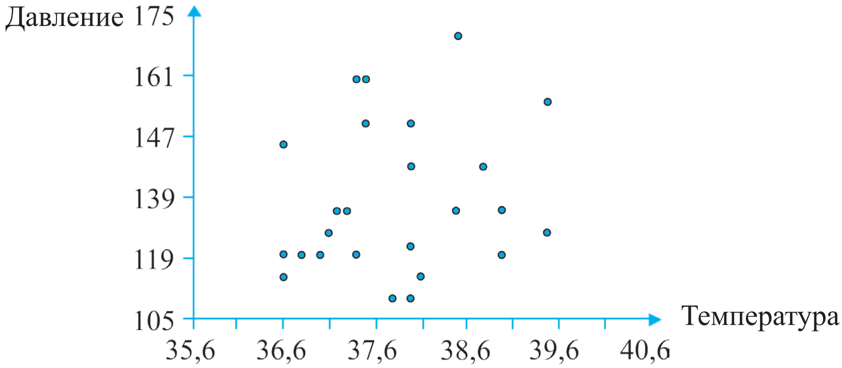
Есть ли взаимосвязь между числом выигранных этапов в Гран-при «Формулы-1» и количеством очков, набранных гонщиком по итогам всех этапов?

△ Диаграмма рассеивания для этих данных имеет вид:



На диаграмме видно, что гонщики, выигравшие всего один этап, могут набрать много очков, хорошо выступив в других этапах. Например, К. Райкконен набрал 91 очко, потому что часто занимал второе место. Гонщики, выигравшие по два этапа, в среднем набрали больше очков (около 68), чем гонщики, выигравшие только один этап (около 52 очков). Наверное, есть некоторая взаимосвязь между числом набранных очков и числом выигранных этапов. Но судить о ней определенно по результатам одного года трудно —она не столь явная, как связь между ростом и весом. ▲

Пример 3. Самочувствие человека во многом определяется температурой тела и артериальным давлением. По данным обследования 25-ти человек в больнице, построена диаграмма рассеивания для температуры и давления.

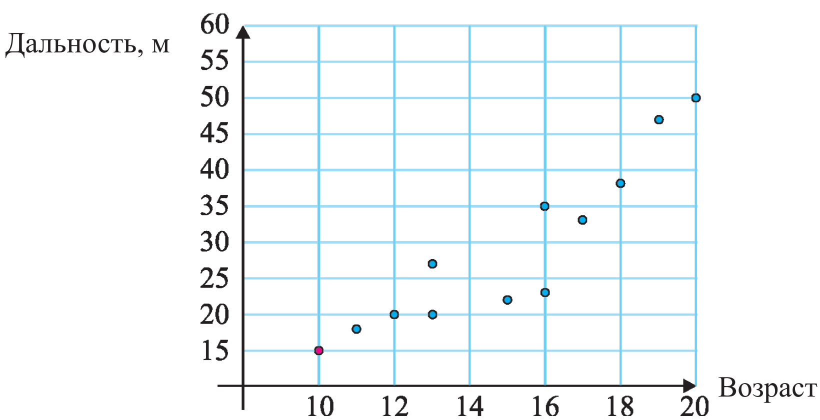


На диаграмме 5 не видно никакой связи между давлением и температурой. При гриппе или ангине может быть высокая температура и нормальное давление. А у людей с повышенным давлением (гипертоников) или пониженным давлением (гипотоников) температура тела может быть совершенно нормальной.

Пример 4. На школьном соревновании по метанию гранаты ученики показали следующие результаты:

Спортсмен	A	B	C	D	E	F	G	H	I	G	K	L
Возраст	12	16	16	18	13	19	11	10	20	17	15	13
Дальность, м	20	35	23	38	27	47	18	15	50	33	22	20

Связаны ли результаты спортсменов с их возрастом? Если возраст спортсменов увеличивается, будет ли расти результат?



Построим диаграмму рассеяния:

Два 13 – летних и два 16 – летних спортсмена показывают разные результаты. Один из 16 – летних спорстменов показал более худший результат, чем один из 13-летних спорстменов.

Несмотря на это, в целом можно сказать, что результаты спортсменов связаны с их возрастом.

Вместе с этим, если возраст спортсменов увеличивается, соответствующие результаты тоже растут.

Упражнения

47. Для следующего набора пар значений постройте диаграмму рассеяния: (1; 2), (2; 2), (3; 2), (3; 4), (4; 5), (5; 6), (4; 3), (4; 4), (6; 6). Можно ли говорить о том, что с ростом первого значения пары в целом возрастает и второе значение?

48. Для следующего набора пар значений постройте диаграмму рассеяния: (1; 2), (2; 3), (3; 3), (3; 4), (3; 2), (4; 3), (4; 4), (5; 2), (6; 3). Можно ли говорить о том, что с ростом первого значения пары в целом возрастает и второе значение?

49. В таблице приведены данные о весе и росте 12 детей.

Рост, см	165	177	161	162	170	176	177	164	166	161	169	159
Вес, кг	53	67	45	53	60	62	58	60	62	55	55	49

Постройте диаграмму рассеяния. Есть ли взаимосвязь между ростом и весом?

50. Фигуристы получает две оценки: за технику и за артистизм. В таблице приведены оценки одного судьи за выступления различных фигуристов на одном соревновании.

Техника	165	177	161	162	170	176	177	164	166	161	169	159
Артистизм	4,5	4,2	4,6	4,5	5,1	62	5,2	5,6	5,1	5,6	5,9	5,8

Постройте диаграмму рассеяния этих оценок. Есть ли какая-то взаимосвязь между оценками за технику и оценками за артистизм?

51. Мальчики на соревнованиях прыгали в длину с места и бежали 60 м. Их результаты приведены в таблице.

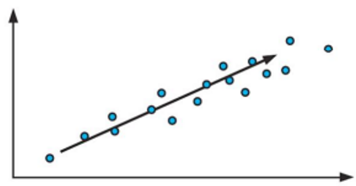
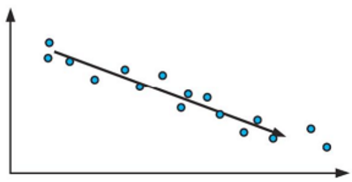
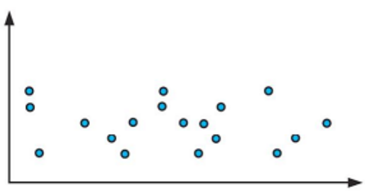
Прыжок, см	180	194	190	215	210	170	175	202	205	195	205	200	190	186
Бег, сек	10,8	10,2	10,6	9,5	10,2	11,0	11,6	10,4	10,0	11,0	9,8	10,6	10,8	10,7

Постройте диаграмму рассеяния. Можно ли утверждать, что результаты прыжков с места связаны со скоростью бега на 60 м?

Перечислим некоторые свойства диаграммы рассеяния.

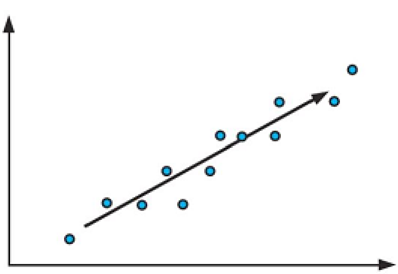
1) Направление зависимости

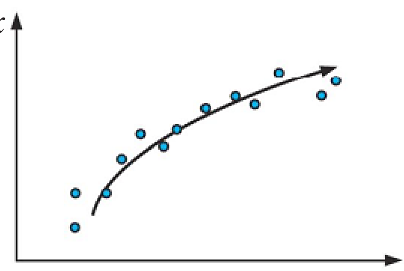
Можно наблюдать три случая:

Форма диаграммы рассеяния	Объяснение
	Имеющаяся здесь зависимость называется положительной. В этом случае, если члены первого ряда данных растут, то члены второго ряда тоже растут
	Имеющаяся здесь зависимость называется отрицательной. В этом случае, если члены первого ряда данных растут, то члены второго ряда убывают
	Здесь зависимости нет.

2) ***Линейность зависимости***

Это свойство показывает, в какой мере соответствующие точки находятся на или вблизи некоторой прямой.

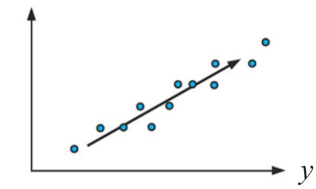




3) ***Устойчивость линейной зависимости***

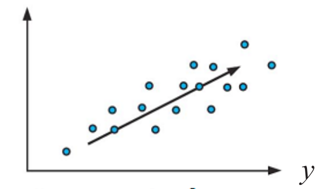
В случае, когда два ряда линейно зависимы, можно наблюдать следующие виды.

сильная зависимость



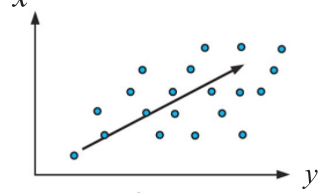
сильная положительная зависимость

средняя зависимость

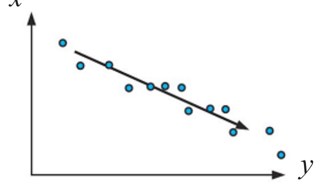


средняя положительная зависимость

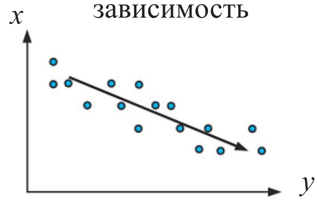
слабая зависимость



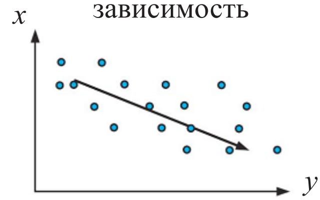
слабая положительная зависимость



сильная отрицательная зависимость



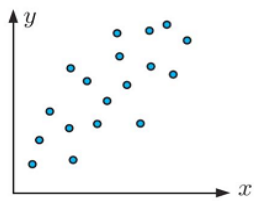
средняя отрицательная зависимость

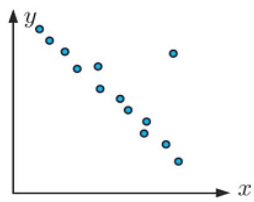


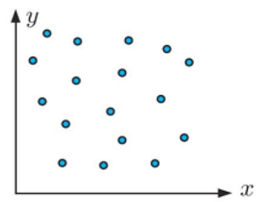
слабая отрицательная зависимость

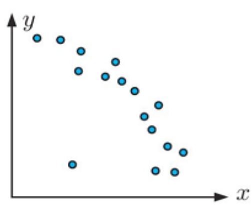
Упражнения

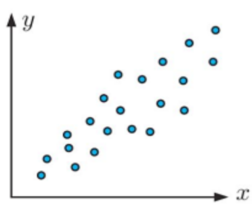
52. Определите свойства зависимости исходя из диаграммы рассеяния.

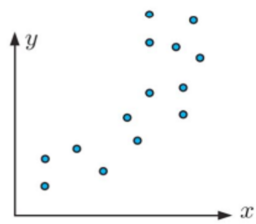
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

Сделайте выводы о связи двух рядов данных.

53. В таблице приведены сведения о выставленных двумя судьями баллов нескольким спортсменам:

Спортсмен	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1-судья	5	6.5	8	9	4	2.5	7	5	6	3
2-судья	6	7	8,5	9	5	4	7.5	5	7	4.5

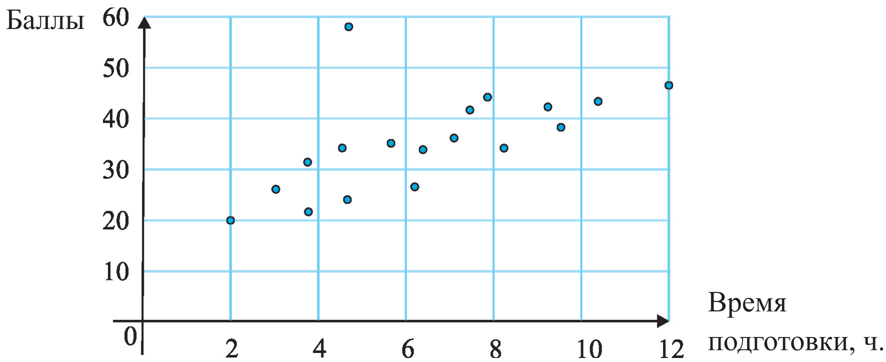
Постройте диаграмму рассеяния. Связаны ли баллы, выставленные судьями? Если связаны, исследуйте зависимость.

54. В таблице приведены результаты пробного тестирования учеников по русскому языку и математике:

Ученик	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Русский язык	64	67	69	70	73	74	77	82	84	85
Математика	85	82	80	82	72	71	70	71	62	66

Постройте диаграмму рассеяния. Можно ли сделать вывод, что если ученик хорошо усвоил в школе русский язык, то он успешен и в математике?

55. В диаграмме приведены результаты пробного тестирования учеников по математике, а также время подготовки к этому тестированию:



Определение степени линейной зависимости. Для определения степени линейной зависимости двух видов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ va $y_1, y_2, \ldots, y_n$ статистических данных используется так называемый коэффициент корреляции (анг. correlation – связь).

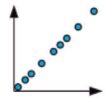
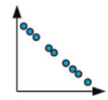
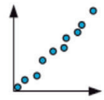
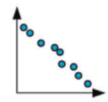
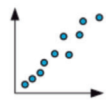
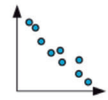
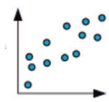
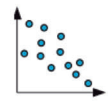
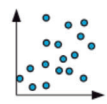
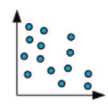
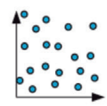
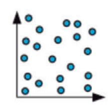
Этот коэффициент определяется следующим образом: $r = \dfrac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum (x-\bar{x})^2 \sum (y-\bar{y})^2}$. Здесь $\bar{x}$, $\bar{y}$ – средние заданных двух рядов данных, $\sum$ – знак суммирования.

Приведем свойства коэффициента корреляции:

1) значение коэффициента r принадлежит отрезку $[-1; 1]$.
2) знак коэффициента r определяет направление зависимости, то есть
- если r положительно, то заданные ряды данных положительно зависимы;
- если r отрицательно, то заданные ряды данных отрицательно зависимы;

3) значение коэффициента r определяет устойчивость зависимости, причём
- если $r = \pm 1$, то заданные ряды данных линейно зависимы;
- если r = 0, то заданные ряды данных линейно независимы;

В следующей таблице приведены сведения о видах зависимости для значений коэффициента r:

$r = 1$	положительная линейная зависимость		$r = -1$	отрицательная линейная зависимость	
$0{,}95 \le r < 1$	очень сильная положительная линейная зависимость		$-1 < r \le -0{,}95$	очень сильная отрицательная линейная зависимость	
$0{,}87 \le r < 0{,}95$	сильная положительная линейная зависимость		$-0{,}95 < r \le -0{,}87$	сильная отрицательная линейная зависимость	
$0{,}5 \le r < 0{,}87$	средняя положительная линейная зависимость		$-0{,}87 < r \le -0{,}5$	средняя отрицательная линейная зависимость	
$0{,}1 \le r < 0{,}5$	слабая положительная линейная зависимость		$-0{,}5 < r \le -0{,}1$	слабая отрицательная линейная зависимость	
$0 \le r < 0{,}1$	нет линейной зависимости		$-0{,}1 < r \le 0$	нет линейной зависимости	

Видно, что коэффициент корелляции определяет, насколько близко расположены точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) кривой рассеяния к некоторой прямой.

Для вычисления коэффициента корреляции целесообразно подготовить таблицу специального вида.

Пример. Фермер хочет изучить зависимость скорости роста хлопчатника от дозы внесенного удобрения. Он разбил хлопковое поле на четыре участка A, B, C, D, внес различное количество удобрений в каждый из них. Затем он записывал в таблицу сведения о ежедневном росте растений:

участок	масса удобрения (г)	ежедневный рост (мм)
A	1	3
B	2	3
C	4	6
D	5	8

Исследуйте зависимость скорости роста хлопчатника от дозы внесенного удобрения.

△ Заполним таблицу:

	x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
	1	3	–2	–2	4	4	4
	2	3	–1	–2	2	1	4
	4	6	1	1	1	1	1
	5	8	2	3	6	4	9
Всего:	12	20			13	10	18

Здесь $\bar{x} = \dfrac{\sum x}{n} = \dfrac{12}{4} = 3$, $\bar{y} = \dfrac{\sum y}{n} = \dfrac{20}{4} = 5$

Используя таблицу, вычислим коэффициент корреляции:

$$r = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum (x-\bar{x})^2 \sum (y-\bar{y})^2} = \frac{13}{\sqrt{10 \cdot 18}} \approx 0{,}969$$

Значит, скорость роста хлопчатника очень сильно связана с дозой внесенного удобрения. ▲

Примечание В случае, когда объём рядов данных относительно велик, удобно применять средства вычислений.

Пример. Измерены массы спортсменов и максимальные скорости бега:

Масса x (кг)	85	60	78	100	83	67	79	62	88	68
Максимальная скорость y (км/ч$^{-1}$)	26	29	24	17	22	30	25	24	19	27

Исследуйте зависимость двух рядов данных.

△ Внесём полученные данные в таблицу Microsoft Excel, а в свободной ячейке введём функцию КОРРЕЛ (A2:A11; B2:B11), служащую для вычисления значения коэффициента корреляции. В результате получим следующее:

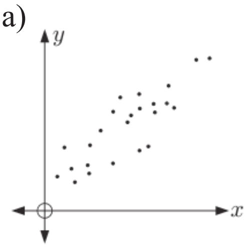
	A	B	C
1	Масса, *x* (*кг*)	Макси-мальная скорость, (*км/ч*)	
2	85	26	Коэффициент корреляции, вычисленный с помощью функции КОРРЕЛ (A2;A11;B2;B12)
3	60	29	
4	78	24	
5	100	17	– 0,813
6	83	22	
7	67	30	
8	79	25	
9	62	24	
10	88	19	
11	68	27	

Так как $r \approx -0{,}813$ и $-0{,}87 < r \leq -0{,}5$, то массы спортсменов и максимальные скорости находятся в средней отрицательной зависимости.

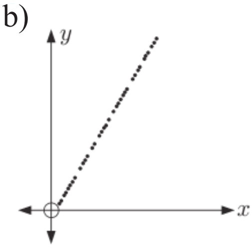
Упражнения

56. Какие значения коэффициента корреляции соответствуют приведённым диаграммам рассеяния?

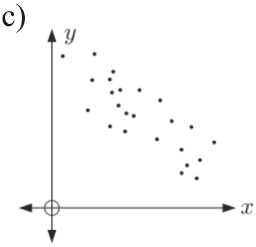
a)



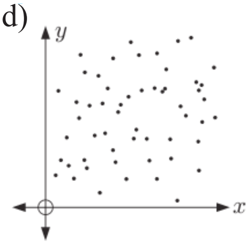
b)



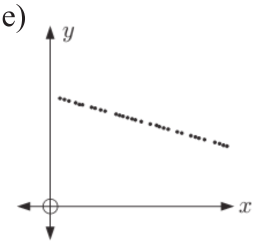
c)



d)

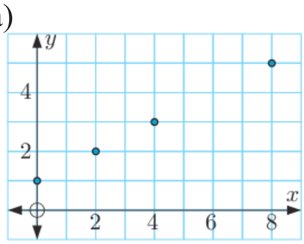


e)

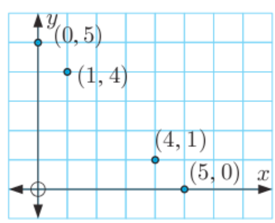


57*. Используя формулу $r = \dfrac{\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sum(x-\overline{x})^2\sum(y-\overline{y})^2}$, найдите коэффициенты корреляции для следующих диаграмм рассеяния:

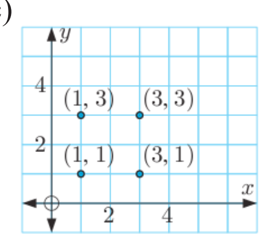
a)



b)



c)



58*. В таблице приведены сведения о посещении врачами детей, проживающих в квартале:

Возраст	2	5	7	5	8
Число посещений	10	6	5	4	3

a) постройте диаграмму рассеяния;

b) вычислите коэффициент корреляции. Проверьте результаты вычислений с помощью таблицы Microsoft Excel;

c) в какой связи находится число посещений врачами и возраст детей?

Задача для исследования. Фермер хочет использовать новый вид удобрений и определить его эффективность. Для этого он на двух участках посадил горох одного сорта. На первый участок он внёс традиционный вид удобрений, а на второй – новый.

После сбора урожая он с каждого участка выбрал случайным образом по 150 стручков гороха, посчитал в каждом из них количество горошин и выписал результаты:

Традиционный вид удобрений:

4	6	5	6	5	6	4	6	4	9	5	3	6	8	5	4	6	8	6	5	6	7	4	6	5	2	8	6	5	6	5	5	5	4	4	4	6	7	5	6
7	5	5	6	4	8	5	3	7	5	3	6	4	7	5	6	5	7	5	7	6	7	5	4	7	5	5	5	6	6	5	6	7	5	8	6	8	6	7	6
6	3	7	6	8	3	3	4	4	7	6	5	6	4	5	7	3	7	7	6	7	7	4	6	6	5	6	7	6	3	4	6	6	3	7	6	7	6	8	6
6	6	6	4	7	6	6	5	3	8	6	7	6	8	6	7	6	6	6	8	4	4	8	6	6	2	6	5	7	3										

Новый вид удобрений:

6	7	7	4	9	5	5	5	8	9	8	9	7	7	5	8	7	6	6	7	9	7	7	7	8	9	3	7	4	8	5	10	8	6	7	6	7	5	6	8
7	9	4	4	9	6	8	5	8	7	7	4	7	8	10	6	10	7	7	7	9	7	7	8	6	8	6	8	7	4	8	6	8	7	3	8	7	6	9	7
6	9	7	6	8	3	9	5	7	6	8	7	9	7	8	4	8	7	7	7	6	6	8	6	3	8	5	8	7	6	7	4	9	6	6	6	8	4	7	8
9	7	7	4	7	5	7	4	7	6	4	6	7	7	6	7	8	7	6	6	7	8	6	7	10	5	13	4	7	11										

Для каждого участка :

1) сгруппируйте данные по частотам.

2) постройте диаграмму частот.

3) найдите моду, медиану и среднее. Объясните их смысл.

4) сравните полученные для каждого участка значения.

Типовое контрольное задание

1. В таблице приведены данные о средней заработной плате (X) и числе уволившихся за год работников (Y).

X (*тыс. сум*)	1000	1500	2000	2500	3000
Y (*человек*)	60	35	20	20	15

1) чему равна средняя заработная плата уволившихся в 5 фирмах?

2) исследуйте зависимость между рядами данных X и Y. Сделайте выводы.

71-73 ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ И ЕГО ВЕРОЯТНОСТИ

Приступая к раскрытию понятия случайного события и его вероятности, обратимся к следующим жизненным ситуациям. Передавая прогноз погоды на телевидении или радио на следующий день, диктор использует выражения: «завтра ожидается малооблачная погода», «завтра в регионе ожидается дождь, возможна гроза» и т.п. При этом никогда не говорится, что завтра обязательно выпадет дождь. Утверждается лишь возможность того, что он выпадет (это означает, что дождь может и не выпасть).

Как при этом оценить степень возможности наступления события, заключающегося в выпадении дождя? Равна ли она 30%? Или 50%? А может быть 95%? Можно ли измерить нашу уверенность в выпадении осадков? Эти вопросы возникают естественно.

В то же время вы наверняка слышали такие фразы: «я купил 10 лотерейных билетов, причём выигрышными оказались не один билет из них, а целых два!», «неожиданно случилось это событие», «в порядке эксперимента я посадил 100 семян, из которых взошли 96»

Испытание (опыт, эксперимент) – одно из важных понятий теории вероятностей. Оно имеет широкий смысл.

1) Футбольный судья назначил пенальти. Все взволнованы.

«Так…. Забьёт ли гол футболист, выполняющий одиннадцатиметровый удар или не не забьёт? Иначе говоря, произойдёт ли это радостное для болельщика команды событие или оно всё-таки не наступит?

Конечно же, мы не можем предсказать исход этого события. Однако с определённой уверенностью, вероятностью мы можем говорить, что пенальти будет реализован, так как в большинстве таких случаев гол обязательно забивается.

Футбольная игра – эксперимент. В этом эксперименте мы наблюдаем также такие события, как «победа команды», «счёт, с которым закончится матч». Однако в конечном итоге мы не можем на 100% предугадать исход игры. В то же время мы в этом эксперименте можем с уверенностью сказать, что «игра обязательно закончится либо победой одной из команд, либо ничьей».

2) В мешке лежат неотличимых на ощупь 10 шаров одинакового радиуса, одинаковой массы и одного и того же материала. Пять из этих шаров зеленого цвета, а пять – белого. Мы перемешиваем шары и наугад извлекаем один из них. Какого цвета вытащенный шар? Извлечение шаров из мешка – эксперимент. В этом эксперименте мы наблюдаем событие «цвет извлечённого шара». Но мы не можем точно предсказать результат этого эксперимента. Извлечённый шар может быть как белым, так и

зелёным. Так как количества белых и зеленых воздушных шаров в мешке одинаковы, то существуют равные возможности для наступления события, заключающегося в том, что извлечённый шар будет белого или зелёного цвета.

Мы называем такие события ***равновозможными.***

3) Рассмотрим подбрасывание игрального куба (на гранях которого расположены числа от 1 до 6). Это – эксперимент. Естественно предположить, что куб изготовлен из однородного материала (то есть не может быть такого, что одна его половина – металл, а другая – дерево!), а также то, что при подбрасывании он достаточно хорошо вращается в воздухе и падает на ровную поверхность. В этом эксперименте мы наблюдаем событие, заключающееся в выпадении некоторого числа на верхней грани куба. Здесь возможности выпадения каждого из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 одинаковы.

4) Перед началом футбольного матча судья подбрасывает вверх монету и таким образом определяется, на какой половине поля начнёт игру та или иная команда. В этом эксперименте мы наблюдаем наступление событий «выпала решка» или «выпал герб». Эти события являются равновозможными.

Предположим, что ***эксперимент в заданных условиях можно повторять достаточно много раз.*** В частности, монету или куб можно бросать достаточное количество раз.

Каждый из вас может привести другие примеры экспериментов, исходы которых являются случайными событиями. В итоге мы приходим к следующему:

1. *Термины «опыт», «эксперимент» имеют чрезвычайно широкий смысл; наша каждодневная деятельность по своей сути тоже опыт;*

2. *Эксперимент производится при определенных условиях (равенство радиусов шаров, равенство их масс, перемешивание; однородность материала, из которого изготовлена монета или игральный куб, достаточное вращение в воздухе и т. д.);*

3. *Эксперимент в заданных условиях можно повторять достаточно много раз.*

Определение 1. Событие, которое в результате эксперимента может произойти или не произойти, называется ***случайным событием.***

Выпадение числа 5 при подбрасывании куба, выпадение герба при подбрасывании монеты, извлечение белого шара из мешка – все они являются примерами случайных событий. Случайные события обычно обозначаются буквами $A, B, C, \ldots$.

Определение 2. Событие, которое в результате эксперимента обязательно происходит, называется ***достоверным***.

Например, при подбрасывании игрального куба событие «выпадет любое число от 1 до 6» является достоверным. Обозначим достоверное событие буквой U.

Определение 3. ***Невозможным*** называется событие, которое в результате эксперимента произойти не может.

Например, при подбрасывании игрального куба «выпадет число 7» или «выпадет число 0» – события являются невозможными. Обозначим невозможное событие буквой V.

Раздел математики, изучающий взаимосвязь между случайными событиями, закономерностями случайных явлений и их применением для получения выводов в решении практических задач, называется теорией вероятностей и математической статистикой. Отметим, что великие ученые нашей Родины Всеволод Романовский, Ташмухамед Сарымсаков, Сагды Сираждинов создали научную школу, известную во всём мире своими глубокими исследованиями.

Упражнения

59. Ответьте на вопросы:

1) Опыт, эксперимент. Что это означает? Приведите примеры.
2) Что такое случайное событие?
3) Объясните понятие достоверного события. Приведите примеры.
4) Дайте понятие невозможного события. Приведите примеры.

60. Приведите по 4 примера на достоверное, невозможное и случайное события.

61. Какое из следующих событий является случайным, достоверным, невозможным: 1) выигрыш лотерейного билета; 2) вы играете в шахматы с гроссмейстером и выигрываете у него; 3) солнце восходит с востока; 4) солнце восходит с юга; 5) среда следует сразу же после понедельника; 6) переворачивание чашки при данных условиях, когда вода не проливается;
7) в игре спортлото числа 8, 12, 17, 22, 29, 38 являются выигрышными;
8) пятница следует сразу же после четверга; 9) 20 июля в Ташкенте выпадут осадки; 10) 10 марта в Фергане пройдёт дождь; 11) при подбросасывании игрального куба выпадут числа 0, 9, 14.

62. Подбрасываются две монеты. Запишите все возможные исходы, которые могут произойти.

63. Мария бросила в баскетбольную корзину 30 раз и попала 20 раз. Манзура бросила в баскетбольную корзину 28 раз и попала 18 раз. Кто более результативен?

64*. Бросаются два игральных куба или монеты. Запишите все возможные исходы, которые могут произойти.

65*. Монета подбрасывается три раза. Запишите все возможные исходы, которые могут произойти.

66. Оцените степень возможности наступления событий *A* и *B* Используйте слова «более вероятно», «менее вероятно», «равновероятно»:
1) *A*: появление числа 5 при подбрасывании куба; B: при подбрасывании куба число 5 не выпадает; 2) *A*: Бунёдкор стал чемпионом Узбекистана; *B:* «Бунёдкор» стал чемпионом мира по футболу; 3) *A*: Завтра наступит четверг; B: завтра четверг не наступит; 4) *A*: при подбрасывании куба выпадает чётное число; B: при подбрасывании куба выпадет нечётное число; 5) *A*: 30 декабря выпал снег; *B:* 10 июля температура воздуха составляет 12 ° C; 6) *A*: при подбрасывании монеты выпадет решка; *B:* при подбрасывании монеты решка не выпадет.

67*. Составьте всевозможные четырёхзначные числа, состоящие из неповторяющихся цифр 3, 6, 7, 9. Сколько из них: 1) делится на 4; 2) сколько чисел начинается с цифры 6; 3) Сколько чисел заканчивается цифрой 7; 4) Сколько нечетных чисел стоят рядом? 5) Сколько чисел делится на 3?

68. Бросают два игральных куба. Какой может быть сумма выпавших чисел? А когда бросили три игральных куба?

69. В билете спортлото «6 из 49» Муяссар обозначила номера 10, 11, 12, 13, 14, 15, а Мамура 7, 13, 19, 26, 31, 48. Кто, по вашему мнению, выиграет с большей вероятностью? Почему?

70. Составьте всевозможные трёхзначные числа, состоящие из неповторяющихся цифр 2, 3, 4. Во скольких из них имеются чётные цифры, стоящие рядом?

71. Составьте всевозможные четырёхзначные числа, состоящие из неповторяющихся цифр 1, 2, 3, 4. Во скольких из них имеются нечётные цифры, стоящие рядом?

Вероятность случайного события. Рассмотрим два примера.

Пример 1. В сосуде 10 шаров, один чёрный и девять белых. Случайным образом мы извлекаем один из них. В каком случае больше возможностей, когда извлекается белый шар или когда извлекается чёрный? Так как в сосуде белых шаров больше, чем чёрных, то естественно предположить, что возможностей извлечь белый шар больше. Общее число исходов равно 10, из которых 9 *благоприятствуют* извлечению белого шара.

Также естественно считать, что степень возможности извлечения белого шара может быть измерена числом $\frac{9}{10}$.

Пример 2. В эксперименте с подбрасыванием игрального куба всего есть 6 исходов. Для выпадения каждой цифры имеется только один вариант. Например, выпадению числа 5 *благоприятствует* лишь один исход.

Эти примеры дают возможность количественно определить и описать случайное событие, полученное в результате эксперимента.

Рассмотрим события, которые могут произойти в результате эксперимента. Общее число событий обозначим через n, а число исходов, *благоприятствующих* наступлению A, через k**.**

Определение. Вероятностью появления случайного события A называется значение дроби $\frac{k}{n}$.

Будем обозначать эту вероятность через $P\ (A)$ (буква P – начальная буква английского слова probability – вероятность). Таким образом, согласно определению:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{число благоприятствующих исходов}}{\text{число всех исходов}}$$

Эта формула называется **формулой классической вероятности.** Для достоверного события $k = n$ и $P(U) = \frac{n}{n} = 1$. Для невозможного события имеем $k = 0$ va $P(V) = \frac{0}{n} = 0$. В остальных случаях дробь $\frac{k}{n}$ является правильной дробью.

Примеры.

1) Найдите вероятность выпадения герба при подбрасывании монеты. Если мы обозначим это событие через G, то $P(G) = \frac{1}{2}$, так как общее число событий, которые могут происходить в результате эксперимента, равно $n = 2$, а число исходов, *благоприятствующих* наступлению G, равно $k = 1$.

2) В мешке 10 белых и 20 синих шаров. Чему равна вероятность события, заключающегося в том, что случайно извлечённый шар белого цвета; синего цвета?

В этом примере $n = 10 + 20 = 30$.

P (извлечение белого шара)$= \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$;

P (извлечение синего шара)$= \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.

Вопросы и задания

1. Что вы понимаете под равнозможными событиями?
2. Объясните фразу «исходы, *благоприятствующие* наступлению события.
3. Дайте классическое определение вероятности.

Упражнения

72. 20 из 1000 изделий являются бракованными. Найдите вероятность того, что изделие, который вы покупаете, является бракованным, и выразите её в процентах.

73. В школе обучается 800 детей. Из них 80 учатся на отлично. Был выбран случайный ученик. Найдите вероятность, что он является отличником промоутером и выразите её в виде дроби.

74. Корзина содержит 30 яблок и 20 груш. Случайным образом выбирается один из фруктов. Найдите вероятность события: 1) выбрана груша; 2) выбрано яблоко; 3) выбран грецкий орех; 4) выбраны груша или яблоко.

75. В мешке находится 15 шаров, пронумерованных числами 1, 2, 3, ..., 14, 15. Случайным образом извлекается один шар. Найдите вероятность того, что на выбранном шаре написано число, делящееся на 7; на 10; на 5; на 3; на 2.

76. Монета подбрасывается 2 раза. Найдите вероятности всех исходов и составьте соответствующую таблицу.

77*. Монета подбрасывается 3 раза. Найдите вероятности всех исходов и составьте соответствующую таблицу.

78*. Бросаются два игральных куба. Найдите вероятность того, что сумма выпавших чисел равна 2, 3, ... 12. Заполните таблицу:

Сумма	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность											

Указание: $2=1+1$; $3=1+2=2+1$; $4=1+3=3+1=2+2$.

79*. В сосуде находятся неотличимые на ощупь 10 белых, 25 зеленых, 15 черных карандашей. Какое наименьшее число карандашей нужно извлечь одновременно, чтобы среди них обязательно был карандаш белого цвета?

80. Грани куба окрашены либо в белый, либо зеленый цвет. Известно, что вероятность того, что при подбрасывании куба выпадет грань белого цвета, равна $\frac{1}{3}$, а зелёного $\frac{2}{3}$. Сколько граней окрашено в белый цвет? А сколько в зелёный?

81. В сосуде находятся неотличимые на ощупь 18 синих, 15 черных, 17 красных карандашей. Наугад выбирается один карандаш. Найдите вероятность того, что он 1) синий; 2) красный; 3) черный. Объясните, почему сумма полученных чисел равна 1.

82. 40% шаров в сосуде белого цвета, треть – черного цвета, а остальные – красного цвета. Наугад извлекается один шар. Вероятность какого цвета наибольшая? А наименьшая? Меньше?

83. 1) Из цифр 6, 7, 8 без повторений составляются всевозможные 3-х значные числа. Найдите вероятность того, что две чётные цифры будут рядом. 2) Из цифр 3, 4, 5 без повторений составляются всевозможные 3-х значные числа. Найдите вероятность того, что две нечётные цифры будут рядом.

84. Известно, что в 5 мешках находятся шары, распределенные следующим образом: первый мешок: 20 зеленых, 60 белых; другой: 30 зеленых, 90 белых; третий: 18 зеленых, 32 белых; четвертый: 25 зеленых, 75 белых; пятый: число белых, зеленых, черных шаров одинаково.

Если будет извлечен шар зеленого цвета, то полагается приз. Какой мешок вы бы выбрали?

85. Алексей не знает, как решить 5 из 50 вариантов контрольной работы. Во время экзамена ему был предоставлен один вариант. Найдите вероятность того, что он сможет решить этот вариант и выразите её в процентах.

86. Разыгрывается 100 000 лотерейных билетов. Из них 25 000 билетов – выигрышные. Найдите вероятность того, что выбранный билет выигрывает и выразите её в виде дроби.

Статистическое определение вероятности. Мы увидели, что вероятность выпадения герба при подбрасывании монеты равна $P\ (G) = \frac{1}{2}$.

Как ещё можно понять это равенство? Если существует два равновозможных события, то это не означает, что при поочередном подбрасывании монеты 100 раз, 50 раз выпадет герб, а 50 раз – решка.

В то же время естественно предположить, что если монета будет подброшена достаточно много раз, ***примерно в половине*** из них выпадет герб.

Отношение числа выпадений герба к общему числу подбрасываний при многократном подбрасывании монеты приблизительно равно $\frac{1}{2}$. Так мы будем понимать то, что вероятность выпадения герба равна $\frac{1}{2}$.

Действительно, результаты, полученные в эксперименте «подбрасывание монеты», свидетельствуют об этом. Приведём некоторые результаты такого эксперимента.

Иследователь	Число подбрасываний, n	Число гербов, μ	Частота выпадения герба μ/n
Французский учёный Дж.Л.Бюффон	4040	2048	$\approx 0{,}5069$
Школьники	6000	2953	$\approx 0{,}4922$
Английский учёный К.Пирсон	12000	6019	$\approx 0{,}5016$
Английский учёный К.Пирсон	24000	12012	$\approx 0{,}5005$

Согласно классическому определению вероятности, $P\ (G)=\frac{1}{2}$. Из таблицы видно, что отношение $\frac{\mu}{n}$ приблизительно равно $\frac{1}{2}$:

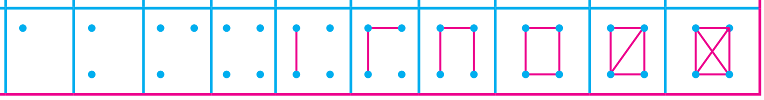
$$\frac{\mu}{n} \approx \frac{1}{2} \quad (\mu \text{ – греческая буква}).$$

Чтобы найти вероятность события, происходящего в экспериментах, выполняется следующее:

1) проводят испытания, например, n раз, в одинаковых условиях. В зависимости от характера интересуемого события, можно положить, например, $n = 10$; 20; 50; 100; 1000; 10 000; 50 000, ...;

2) при каждом испытании наблюдаем, регистрируем и подсчитываем наступления (или не наступления) интересующего нас события A. Обычно используется следующее оформление результатов подсчёта (см. таблицу):

Число возникновения событий A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Соответствующий подсчёт										



Если число наступлений наблюдаемого события превышает 10, это оформление подсчёта будет повторяться. Для подсчёта могут быть использованы и другие символы.

3) В n опытах подсчитывается ***число*** исходов A. Обозначим это число как μ.

4) Составляется отношение $\frac{\mu}{n}$, называемое *частотой события A*.

Многочисленные эксперименты показывают, что при достаточно большом числе испытаний, то есть если n – большое число, частота $\frac{\mu}{n}$ незначительно отличается от некоторого постоянного числа p (колеблется около этого числа):

$$\frac{\mu}{n} \approx p.$$

Это число p и считается *вероятностью* события A.

$\frac{\mu}{n}$	Согласно классическому определению $p=P(G)=0{,}5$	Разница, $\left\lvert\frac{\mu}{n}-p\right\rvert$	Разница в %
0,5069	0,5	0,0069	1,38
0,4922	0,5	0,0078	1,56
0,5016	0,5	0,0016	0,32
0,5005	0,5	0,0005	0,1

Мы видим, что когда число испытаний увеличивается, разница между $p = 0{,}5$ и отношением $\frac{\mu}{n}$ уменьшается. Если число испытаний n достаточно, чтобы сделать следующий вывод: частота $\frac{\mu}{n}$ колеблется около числа n. Значит, естественно предположить, что вероятность выпадения герба равна $\frac{1}{2}$.

Такой метод определения вероятности называется ***статистической вероятностью***.

Многочисленные эксперименты показывают, что при достаточно большом числе испытаний частота события незначительно отличается от некоторого постоянного числа (колеблется около этого числа). Это число и называют *вероятностью события*.

Вопросы и задания

1) что вы подразумеваете под фразой «вероятность выпадения числа 4 при подбрасывании куба равна 1/6»?

2) что означает частота события в эксперименте?

3) дайте статистическое определение вероятности?

Упражнения

87. Услышав информацию о том, что на каждые 150 лотерейных билетов приходиться один выигрыш, Акмаль купил 150 билетов. Он утверждает, что он обязательно выиграет. Прав ли он? Почему?

88. Павел отметил на карточке лото «6 из 49» числа 9, 17, 23, 31, 39, 43 и выиграл. «Отмечу-ка я эти же числа в следующем туре. Они обязательно выиграют». Прав ли он? Почему?

89*. В конверте лежат 50 (1000) одинаковых карточек, на которых написаны числа от 1 до 50 (от 1 до 1000). Наугад вынимается одна карточка. Найдите вероятность, что последняя цифра написанного на карточке числа равна 0; 5; 6; 7; 9. Поясните свой ответ.

90. В конверте лежат одинаковые карточки, на которых написаны числа от 21 до 100. Наугад вынимается одна карточка. Найдите вероятность, что выписанное на ней число делится на: 30, 40, 7, 11, 9.

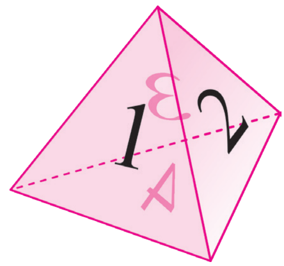
91*. Ребро деревянного куба, окрашенного в синий цвет, имеет длину 40 см. Этот куб распилен на маленькие кубики с длиной ребра 2 см. Их поместили в мешок и тщательно перемешали. Затем наугад вытащили один кубик.

Найдите вероятность того, что у этого кубика:

1) окрашены три грани; 2) окрашены две грани; 3) окрашена одна грань; 4) ни одна грань не окрашена.

92. В конверте лежат одинаковые карточки, на которых написаны числа от 251 до 1000. Наугад вынимается одна карточка. Найдите вероятность, что выписанное на ней число делится на: 500; 300; 200; 75; 25; 10; 9; 3; 2; 80.

93. Вырежьте четыре правильных треугольника из картона. Приклеив их по сторонам, изготовьте фигуру, изображённую на рисунке. Это фигура имеет форму правильного тетраэдра. Напишите на гранях числа 1,2,3,4. Побросьте тетраэдр 100 раз (можно и больше), посчитайте выпадение цифр. Заполните таблицу.



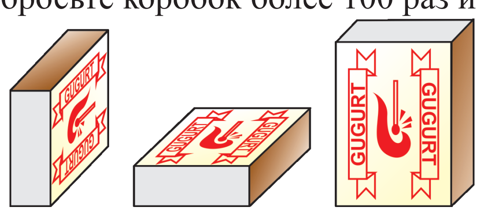
Число	Подсчёт выпадения	Количество повторений	Частота
1			
2			
3			
4			

Для исследования. Возьмите какое-нибудь произведение русского писателя. Подсчитайте число всех слов на 30-той странице. Затем подсчитайте число слов, состоящих из одного слога, двух слогов, трёх слогов и т.д.

Определите частоту употребляемых им слов, состоящих из одного слога, двух слогов, трёх слогов. Обозначьте их через k_1, k_2, k_3, ... Составьте дроби $\frac{k_1}{n}$, $\frac{k_2}{n}$, $\frac{k_3}{n}$, ...

Они и будут искомыми частотами слов, состоящих из одного слога, двух слогов, трёх слогов и т.д. Постройте соответствующие круговые и столбиковые диаграммы, соответствующие этим частотам. Округлите полученные числа с точностью до третьего знака после запятой. Выразите их в обыкновенных дробях и процентах.

Практическая работа. Спичечный коробок подбрасывается многократно. Оцените вероятности событий, соответствующих каждому положению коробка спичек, изобранных на рисунке. Подведите итоги эксперимента. Подбросьте коробок более 100 раз и заполните таблицу.



Положение	Подсчёт выпадения	Количество повторений	Частота
1			
2			
3			

74-77 ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ СОБЫТИЯ. ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ И ИЗОБРАЖЕНИЕ ИХ НА ДИАГРАММАХ ЭЙЛЕРА-ВЕННА

Приведём несколько понятий.

1) Говорят, что в некотором опыте событие A *влечёт* за собой появление события B, если при наступлении события A наступает и событие. Будем это обозначать как $A \subset B$ (или $B \supset A$).

Пример 1. A= {при подбрасывании игрального куба выпадает число 2}. B= {при подбрасывании игрального куба выпадает чётное число}.

Для этих событий $A \subset B$.

Пример 2. A= {капает дождик}

B = {на небе есть облака}

Для этих событий $A \subset B$.

2) Если событие A влечёт за собой появление события B, а также событие В влечёт за собой появление события A, то есть $A \subset B$ и $B \subset A$, тогда события A и B называются равносильными. В этом случае пишем $A = B$.

Пример 3. A= {при подбрасывании игрального куба выпадает одно из чисел 3 или 6}.

B= {при подбрасывании игрального куба выпадает кратное 3 число}.

Для этих событий очевидно равенство $A = B$.

3) *Произведением* событий A и B называется событие AB (или $A \cap B$), состоящее в том, что произошли оба события (и A, и B)

Пример 4. A={при подбрасывании игрального куба выпадает одно из чисел 2, 3, 4}.

B= {при подбрасывании игрального куба выпадает чётное число}. Тогда AB={при подбрасывании игрального куба выпадает одно из чисел 2 и 4}.

4) Суммой событий A и B называется событие $A+B$ (или $A \cup B$), состоящее в том, что произошло хотя бы одно из этих событий (или А, или В).

Пример 5. A={при подбрасывании игрального куба выпадает одно из чисел 1, 3}.

B= {при подбрасывании игрального куба выпадает одно из чисел 1, 2, 6}.

Тогда $A+B$= { 1, 2, 3, 6}

5) *Разностью* событий A и B называется событие $A–B$, состоящее в том, что событие A произошло, а событие B – не произошло).

Пример 6. A= {при подбрасывании игрального куба выпадает одно из чисел 1, 4, 6}.

B= {при подбрасывании игрального куба выпадает одно из чисел 1, 3, 4, 5}.

Тогда $A–B$= { при подбрасывании игрального куба выпадает 6}.

Если выполнены равенства $A+\overline{A}=U$, $A\overline{A}=V$, то события A и $\overline{A}$ называются *противоположными*.

Пример 7. A= {при подбрасывании игрального куба выпадает чётное число}. $\overline{A}$ = {при подбрасывании игрального куба выпадает нечётное число}. Тогда событие $A+\overline{A}$= {при подбрасывании игрального куба выпадает чётное или нечётное число} совпадает с достоверным событием. В силу того, что события A и $\overline{A}$ не могут наступить одновременно, то имеем равенство $A\cdot\overline{A}=V$.

6) Если $AB=V$, то события A и B называются несовместными событиями. Несовместные события не могут наступить одновременно.

Пример 8. A= {при подбрасывании игрального куба выпадает 2}.

B= {при подбрасывании игрального куба выпадает 3}.

Ясно, что 2 и 3 не могут выпасть одновременно. Значит события A и B являются несовместными событиями.

7) Если $AA=B_1+B_2+...+B_n$ и $B_i \cdot B_j=V$ $(i\neq j)$, то будем говорить, что событие *A распадается на частные события* $B_1, B_2, ..., B_n$. В случае, когда A не распадается на частные события, мы его будем называть элементарным.

Пример 9. Пусть при подбрасывании игрального куба событие «выпало 1» обозначим через B_1, «выпало 2» – через B_2, «выпало 3» – через B_3. В этом случае для события A, заключающегося в выпадении одного из чисел 1, 2, 3, имеем $B_1 B_2=B_1 B_3=B_2 B_3=V$. В то же время события B_1, B_2, B_3 являются элементарными.

8) Если $B_1+B_2+...B_n=U$ и $B_i \cdot B_j=V$, $i\neq j$, тогда будем говорить, что события $B_1, B_2, ..., B_n$ образуют *полную группу* несовместных событий.

Например, пусть при подбрасывании игрального куба события «выпало 1,2,3,4,5,6», обозначим через $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ соответственно. В этом случае, очевидно, что $B_1+B_2+B_3+B_4+B_5+B_6=U$.

Обычно элементарные события обозначают через $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$, а множество (пространство) всех элементарных событий через U (или Ω). Будем считать, что все элементарные события *образуют пространство элементарных событий.*

Например: При подбрасывании монеты могут наступить только два элементарных события:

G = {выпал герб }, R = { выпала решка }. В данном случае $U=\{G, R\}$.

При подбрасывании игрального куба могут наступить лишь 6 элементарных событий:

ω_1 = {выпало 1 }, ….., ω_6 = {выпало 6 }. В данном случае $U = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

В случае, когда $U= \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, возникает вопрос о числе всех подмножеств этого множества. В теме «Комбинаторные задачи» на этот вопрос был дан следующий ответ: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 +...+ C_n^n = 2^n$, здесь C_n^k – число k – элементных подмножеств заданного n – элементного множества.

Элементарные события $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ не обязаны быть равновозможными. Если $P(\omega_1)=p_1, ..., P(\omega_n)=p_n$, $p_1+....+ p_n=1$, то каждому элементарному событию соответствует число p_k. В случае, когда элементарные события равновозможны, имеем $p_1 = p_2 = ... = p_n = \dfrac{1}{n}$.

Каждое событие А может быть представлено как сумма нескольких способствующих ему элементарных событий. Например, пусть $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_k}\}$, то есть $A=\omega_{i_1}+\omega_{i_2}+...+\omega_{i_k}$, тогда

$$P(A)=p(\omega_{i_1})+...+ p(\omega_{i_k})= p_{i_1}+...+ p_{i_k}.$$

Вообще говоря, вероятность $P(A)$ события A удовлетворяет следующим условиям:

1) $P(A) \geq 0$; 2) $P(U)=1$; 3) Если $AB=V$, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Если $A \cap B \neq V$, то очевидно, что $P(A+B)=P(A)+P(B) – P(A \cap B)$.

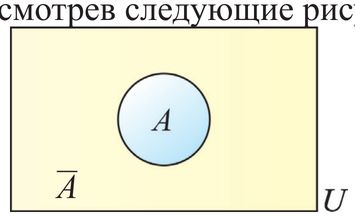
Так как $A+\overline{A}=U$ и $A \cap \overline{A}=V$, то $P(A+\overline{A})= P(U)=1$. Отсюда следует $P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$. Значит $P(\overline{A})=1– P(A)$.

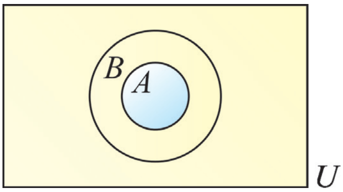
Удобно представлять события и операции над ними с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

В этом можно удостовериться, рассмотрев следующие рисунки:

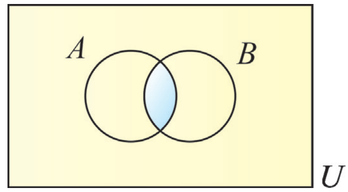
$A, \overline{A}$ – противоположные события.

$A+\overline{A}=U,\ A\overline{A}=V$

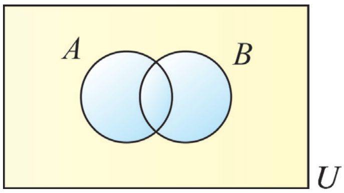




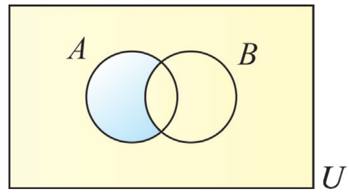
$A \subset B$



$A \cdot B$



$A + B$



$A - B$

Упражнения.

94. На каждый рейс вертолёт может вместить 6 пассажиров. 30 туристов намереваются посетить горы этим вертолётом. Если посадка на вертолёт пассажиров случайна, найдите вероятность того, что Алишер Имомов полетит первым рейсом.

95. Найдите вероятность того, что выбранное наугад одно число из 10, 11, ..., 199 кратно 3.

96. На международном конкурсе музыкальных исполнителей-солистов участвуют 20 музыкантов:

8 из Узбекистана,

7 из США,

а остальные из Китайской Народной Республики.

Найдите вероятность того, что первым на сцену выйдет китайский музыкант.

97. Из 1000 водяных насосов 5 неисправны. Найдите вероятность того, что выбранный наугад насос неисправен.

98. Найдите вероятность того, что при подбрасывании монеты три раза ни разу не выпадет решка.

99. Найдите вероятность того, что при подбрасывании монеты три раза решка выпадет один раз.

100. Найдите вероятность того, что при подбрасывании монеты три раза решка выпадет хотя бы один раз.

101. Два сигнализатора (устройства, сигнализирующие об аварийной ситуации) работают независимо друг от друга. Пусть вероятность срабатывания первого сигнализатора при аварии равна 0,9, а второго - 0,95.

Возникла аварийная ситуация. Найдите вероятности следующих событий:

1) сработали оба сигнализатора;
2) сработал один из сигнализаторов;
3) сработал только первый сигнализатор;
4) сработал только второй сигнализатор;
5) ни один из сигнализаторов не сработал.

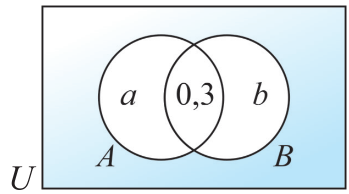
78-80 СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЙ

Сложение вероятностей. Ранее мы привели равенство $P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B)$, справедливое для произвольных событий A и B.

Это равенство определяет *правило сложения вероятностей*.

Пример 1. Пусть $P(A)=0{,}6$, $P(A \cup B)=0{,}7$, $P(A \cap B)=0{,}3$. Найдите $P(B)$.

△ *1 способ.* Построим соответствующую диаграмму Эйлера-Венна:



Отсюда $a+0{,}3=0{,}6$; $a=0{,}3$. $a+b+0{,}3=0{,}7$; $0{,}3+b=0{,}4$; $b=0{,}1$.

Значит, $P(B)=0{,}4$.

2 способ. Согласно правилу сложения вероятностей

$P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B)$; $0{,}7 = 0{,}6+P(B)-0{,}3$; $P(B) = 0{,}4$.

Очевидно, что в случае несовместных событий справедливо равенство $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$.

Пример 2. Из 31 граждан семеро зарегистрированы в Самарканде (S), а пятеро – в Самаркандской области (W).

a) будут ли события S и W совместными?

b) найдите вероятность того, что выбранный случайным образом человек зарегистрирован:

I) в Самарканде;

II) в Самаркандской области;

III) либо в Самарканде, либо в Самаркандской области.

△ a) отметим, что гражданин может быть зарегистрирован только по одному месту жительства. Значит, события S и W несовместны (то есть не могут наступить одновременно).

b) I) $P(S)=\dfrac{7}{31}$; II) $P(W)=\dfrac{5}{31}$.

Для несовместных событий

III) $P(S \cup W) = P(S) + P(W) = \frac{7}{31} + \frac{5}{31} = \frac{12}{31}$

Задача. В саду зацвели 20 красных, 30 фиолетовых и 40 белых цветка. Наугад сорвали один цветок. Найдите вероятность того, что сорванный цветок красного или фиолетового цвета.

$\triangle$ $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{20}{90} + \frac{30}{90} - \frac{0}{90} = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}$. $\blacktriangle$

Упражнения

102. Пусть $P(A)=0{,}4$, $P(A \cup B)=0{,}9$, $P(A \cap B)=0{,}1$. Найдите $P(B)$.

103. Пусть события A и B несовместны, причём $P(X)=0{,}6$, $P(Y)=0{,}5$, $P(X \cup Y)=0{,}9$. Найдите $P(B)$.

104. Пусть события A и B несовместны, причём $P(B)=0{,}45$, $P(A \cup B)=0{,}8$. Найдите $P(B)$.

105. Наугад выбирается один из билетов, пронумерованных числами 1, 2, ..., 15. Обозначим через 11 событие «номер на билете больше 11», через 8 событие «номер на билете меньше 8»

a) будут ли события A и B совместными?
b) найдите I) $P(A)$; II) $P(B)$; III) $P(A \cup B)$.

106. В классе учатся 25 учеников. Из них
11 шестнадцатилетних (F);
12 семнадцатилетних (S);
У 8 учеников дома есть овцы (D);
У 7 учеников дома есть коровы (C);
У 4 учеников дома нет никакой живности (N).

Выбирается произвольный ученик. Найдите следующее и объясните смысл:

a) $P(F)$;	b) $P(S)$;	c) $P(D)$;	d) $P(C)$;	e) $P(N)$;
f) $P(F \cup S)$;	g) $P(F \cup D)$;	h) $P(C \cup N)$;	i) $P(F \cup D)$;	j) $P(D \cup N)$.

Умножение вероятностей

Пусть заданы события A и B. Запись $A|B$ означает, что событие A наступает лишь при наступлении события B.

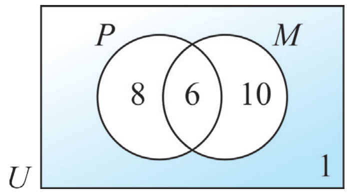
4 пример. Из 25 учеников 14 выбрали плов, 16 выбрали манты. Один ученик выбрал блюдо, отличное от плова и манты, 6 учеников выбрали и плов и манты.

Выбирается один ученик. Найдите вероятность того, что он:

a) выбрал плов (P);

b) выбрал манты (M), при условии, что он уже выбрал плов

△ Нарисуем диаграмму Эйлера –Венна:



Из 25 учеников 14 выбрали плов. Значит,

$$P\,(\text{плов}) = \frac{14}{25}.$$

Из 16 учеников, выбравших манты, 6 выбрали плов.

Значит, $$P\,(\text{плов}|\text{манты}) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

В общем случае, вероятность события A, наступающего лишь при наступлении события B, находится по формуле

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Отсюда имеем: $P\,(A \cap B) = P(A) \cdot P(A|B)$

Вероятность $P\,(A|B)$ называется **условной**.

Очевидно, что если A независимо от B, то и B независимо от A, то есть $P(B|A)=P(B)$.

Если события A и B независимы, то вероятность их одновременного наступления равна произведению их вероятностей, то есть справедливо равенство $P(AB)=P(A) \cdot P(B)$.

Для исследования. Пусть события A и B независимы. Докажите, что события :

1) A и $\overline{B}$; 2) $\overline{A}$ и B; 3) $\overline{A}$ и $\overline{B}$

тоже являются независимыми.

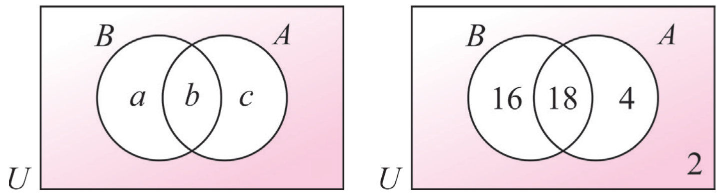
5 пример. Из 40 учеников 22 любят яблоки (A), 34 любят бананы (B), а 2 ученика любят и то и другое. Выбирается произвольный из них.

Найдите вероятность, того, что он:

a) любит оба вида фруктов;

b) любит самое большее – один вид фруктов;
c) любит бананы при условии, что он любит еще и яблоки;
d) не любит яблоки при условии, что он любит бананы.

△



Из диаграммы видно, что $a+b=34$; $b+c=22$; $a+b+c=38$.
Значит, $c=38–34=4$; $b=18$; $a=16$.
Отсюда

a) $P(\textit{два фрукта}) = \frac{18}{40} = \frac{9}{20} = 0,45$;

b) $P(\textit{самое большее – один вид фруктов}) = \frac{38}{40} = \frac{19}{20} = 0,95$;

c) $P(B|A) = \frac{18}{22} = \frac{9}{11}$; d) $P(\overline{A}\ |B) = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$. ▲

Пример 6. Пусть $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B)=p$.

Найдите p, если события A и B:
a) несовместны; b) независимы.
a) Если A и B несовместны, отсюда $P(A \cap B)=0$

Однако $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{5}{6}$$

b) если A и B независимы, тогда отсюда

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

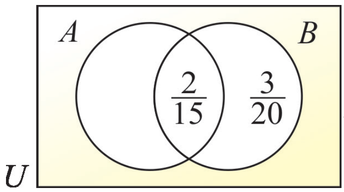
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$ ▲

Пример 7. Пусть $P(B|\overline{A}) = \frac{1}{4}$, $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B|A) = \frac{1}{3}$ Найдите a) $P(B)$;
b) $P(A \cap \overline{B})$.

$\triangle$ $P(B \mid A)=\dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$, отсюда $P(B \cap A)=P(B \mid A)P(A)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{15}$.

Точно также $P(B \cap \overline{A})=P(B \mid \overline{A})P(\overline{A})=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{20}$.

Из диаграммы Эйлера-Венна



a) $P(B)=\dfrac{2}{15}+\dfrac{3}{20}=\dfrac{17}{60}$;

b) $P(A \cap \overline{B})=P(A)-P(A \cap B)=\dfrac{2}{5}-\dfrac{2}{15}=\dfrac{4}{15}$.

Вычисление вероятностей событий

Пример 1. На производстве используется несколько станков. Вероятность того, что во время работы необходимо произвести ремонт одного станка, равна 0,2. Вероятность того, что во время работы необходимо произвести ремонт двух станков, равна 0,13. Также, вероятность того, что во время работы необходимо произвести ремонт более двух станков, равна 0,07. Найдите вероятность того, что во время работы станков необходимо отремонтировать как минимум один станок.

$\triangle$ Рассмотрим события:

A= {во время работы необходимо произвести ремонт одного станка};

B= {во время работы необходимо произвести ремонт двух станков};

C= {во время работы необходимо произвести ремонт более, чем двух станков}.

События A, B и C несовместны. Интересующее нас событие имеет вид:

$A + B + C$ = {во время работы необходимо произвести ремонт как минимум одного станка }. Найдём его вероятность:

$$P(A+B+C)=P(B)+P(B)+P(C)=0,2+0,13+0,07=0,4.$$

Ответ: 0,4. $\blacktriangle$

Пример 2. В мешке лежат 10 красных и 6 синих шаров. Наугад извлекаются 2 шара. Найдите вероятность того, что оба шара одинакового цвета.

$\triangle$ Пусть событие A означает, что оба шара красного цвета, а событие B оба шара синего цвета. Видно, что события А и В несовместны. Значит,

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Событию A благоприятствуют C_{10}^2 элементарных событий, а событию B благоприятствуют C_6^2 элементарных событий. Всего элементарных событий C_{16}^2. Значит

$$P(A+B)=\frac{C_{10}^2+C_6^2}{C_{16}^2}=\frac{1}{2}. \blacktriangle$$

Пример 3. Два охотника выстрелили в волка по одному разу. Вероятность попадания первого охотника в цель равна 0,7, а второго 0,8. Найдите вероятность того, что хотя бы один охотник попадёт в цель.

△ Пусть событие А означает, что в цель попал первый охотник, а событие B – второй. Видно, что события A и B независимы. В то же время эти события несовместны. Значит,

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}7+0{,}8-0{,}56=0{,}94.$$

Пример 4. Одноверременно подбросываются монета и игральный кубик. Найдите вероятность того, что одновременно выпадут герб и число 3.

△ Пусть событие A означает, что выпал герб, а событие В – выпало 3. Видно, что события A и B независимы. Значит,

$$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}. \blacktriangle$$

Пример 5. Среди сотрудников фирмы 7 мужчин и 3 женщины. Наугад выбраны 3 сотрудника. Найдите вероятность того, что все выбранные сотрудники мужчины.

△ Рассмотрим события:

A – первый выбранный сотрудник – мужчина;

B – второй выбранный сотрудник – мужчина;

C – третий выбранный сотрудник – мужчина.

Вероятность того, что первый выбранный сотрудник – мужчина равна $P(A)=0{,}7$.

Вероятность того, что второй выбранный сотрудник – мужчина при условии, что первый выбранный сотрудник – мужчина, равна условной вероятности $P(B\mid A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

Вероятность того, что третий выбранный сотрудник – мужчина при условии, что первые два выбранных сотрудника – мужчины – равна условной вероятности: $P(C\mid AB)=\frac{5}{8}$. Значит, вероятность того, что все выбранные сотрудники мужчины равна $P(ABC) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid AB) = \dfrac{7}{24}$.

Пример 6. Предположим, что для уничтожения военного объекта достаточно одной бомбы. На объект были сброшены 4 бомбы, вероятности попадания которых равны 0,3; 0,4; 0,6; 0,7. Найдите вероятность уничтожения объекта.

△* Так как события A_1, A_2, ..., A_n являются независимыми, то и противоположные им события, $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, ..., $\bar{A}_n$ тоже независимы. Отсюда

$$P(\bar{A}_1\bar{A}_2 \ldots \bar{A}_n) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\bar{A}_n) =$$
$$= (1-P(A_1))\,(1-P(A_2)) \ldots \cdot (1-P(A_n)). \qquad (1)$$

Далее, события $A_1+A_2+\ldots+A_n$ и $\bar{A}_1\,\bar{A}_2 \ldots \bar{A}_n$ противоположны. Поэтому, учитывая (1), имеем

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-P(\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot\ldots\cdot\bar{A}_n)=1-(1-P(A_1))(1-P(A_2)) \ldots (1-P(A_n)). \qquad (2)$$

Отметим что формула (2) позволяет найти вероятность наступления хотя бы одного событий из A_1, A_2, ..., A_n, если известны вероятности $P(A_1)$, ..., $P(A_n)$.

Если $P(A_1)=P(A_2)=\ldots=P(A_n)=p$, то формула (2) примет вид $P(A_1+\ldots+A_n)=1-(1-p)^n$. Значит, вероятность того, что попадёт хотя бы одна бомба, равна $P(A_1+A_2+A_3+A_4)=1-(1-0{,}3)\,(1-0{,}4)\,(1-0{,}6)\,(1-0{,}7)=$
$=1-0{,}7\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3=1-0{,}0504=0{,}9496$. ▲

Упражнения

107. Пусть $P(R)=0{,}4$, $P(S)=0{,}5$ и $P(R \cup S)=0{,}7$, Будут ли R, S зависимыми?

108. Пусть $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(A \cup B)=\frac{1}{2}$ Найдите:

a) $P(A \cap B)$; b) $P(B|A)$; c) $P(A|B)$.

Будут ли A, B зависимыми?

109. Известно, что $P(X)=0{,}5$, $P(Y)=0{,}7$, причём X, Y независимы. Найдите вероятности событий:

a) оба события X, Y произошли.

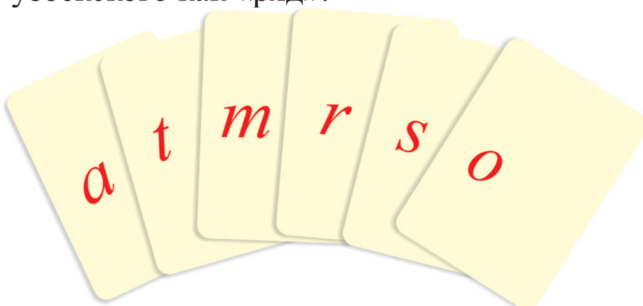
b) произошло либо событие X, либо событие Y.

c) не произошло ни событие X, ни событие Y.

d) произошло событие X, но событие Y не произошло.

e) Событие X произошло при условии наступления события Y.

110. На каждой из шести карточек написана одна из букв a, t, m, r, s, o. Карточки хорошо перемешали. Найдите вероятность события, заключающегося в том, что при выкладывании произвольных четырёх карточек в ряд образуется слово «satr». Примечание: слово «satr» переводится с узбекского как «ряд».



111. Монету подбросили 5 раз. Найдите вероятность выпадения двух гербов.

112. Во время перевозки контейнера, содержащего 21 стандартных и 10 нестандарных изделий, было потеряно одно изделие. Какое именно изделие утеряно – неизвестно. После перевозки наугад извлечено одно изделие и оно оказалось стандартным. Найдите вероятность того, что потерянное изделие было нестандартным.

113. Абонент, набирая телефонный номер, обнаружил, что он забыл последние три цифры номера. Он набрал эти цифры наугад. Найдите вероятность того, что он дозвонится до нужного абонента.

81–84 ПОНЯТИЯ БИНОМИАЛЬНОГО И НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Схема Бернулли. Пусть проводится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события A известна и равна p. Тогда вероятность не наступления этого события равна $q = 1- q$. (Допустим, что значения p и q не меняются во время проведения испытаний и не зависят от номера испытания).

Последовательность таких испытаний называется ***схемой Бернулли***.

Рассмотрим схему Бернулли, состоящую из трёх испытаний. Сопоставим наступлению события A цифру 1, а его не наступлению – цифру 0. Тогда при 3 испытаниях возможны 8 элементарных событий, которые кодируются так:

111, 110, 101, 100, 011, 010, 001 va 000

Так как испытания независимы, вероятность каждого элементарного события можно найти по формуле умножения вероятностей.

Например, вероятность события, соответствующего 110, можно найти так: $ppq=p^2q$.

Выпишем результаты вычислений в виде таблицы:

Элементарное событие	111	110	101	100	011	010	001	000
Вероятность	p^3	p^2q	p^2q	pq^2	p^2q	pq^2	pq^2	q^3

Точно также рассматриваются схемы Бернулли для случаев n =4,5,.....

При этом число элементарных событий для 3 испытаний равно $8=2^3$, для 4 испытаний $16=2^4$, для 5 испытаний $32=2^5$ элементарных событий и т.д., для n испытаний 2^n элементарных событий.

Пример 1. Монета подбрасывается три раза. Пусть A – выпадение герба в каждом испытании..

В каждом испытании вероятности наступления и не наступления события A равны $p=q=\frac{1}{2}$ соответственно. Тогда очевидно, что вероятность каждого события, записанного в таблице, равна $\frac{1}{8}$. Например, вероятность события «герб выпал два раза, а решка – один раз» (ему соответствует код 110) равна $p^2q=\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

Другие случаи рассматриваются аналогично.

Пример 2. В коробке лежат 3 красных и 5 синих карандаша. За каждый шаг вынимается один карандаш и помещается обратно. Обозначим через A вероятность события, заключающегося в том, что при этом испытании мы вытянем красный карандаш. Очевидно, что вероятность наступления события A равна $p=\frac{3}{8}$, а не наступления равна $q=\frac{5}{8}$.

Это испытание повторяется 4 раза.

В результате получим схему Бернулли, состоящую из 4 независимых испытаний.

Поставим вопрос: Чему равна вероятность того, что в первом, третьем и четвертом испытании мы вытащили красный карандаш а во втором – синий?

Рассуждая из выше сказанного, сопоставим этому событию последовательность 1011, состоящую из нулей и единиц. Тогда его вероятность равна

$$p^3q=\left(\frac{3}{8}\right)^3\cdot\frac{5}{8}=\frac{135}{4096}\approx 0{,}033.$$

Найдём вероятность того, что в схеме Бернулли, состоящей из n испытаний, событие A происходит ровно m раз.

Из комбинаторики известно, что число слов длины n, состоящих из m букв a и $n-m$ букв b, равно C_n^m.

Значит, количество элементарных событий, благоприятствующих тому, что в схеме Бернулли, состоящей из n испытаний, событие A происходит ровно m раз, равно C_n^m. Так как вероятность каждого такого элементарного события равна $p^m q^{n-m}$, то заключаем, что:

Теорема. Вероятность того, что в схеме Бернулли, состоящей из n испытаний, событие A происходит ровно m раз, равна $P(n,m)=C_n^m p^m q^{n-m}$

Пример 3. Пусть в схеме Бернулли, состоящей из трёх испытаний, вероятность события A в каждом испытании равна p = 0,2. В таком случае $q=1-0{,}2=0{,}8$ и

$$P(3,0)=C_3^0 p^0 q^3=1\cdot 1\cdot 0{,}8^3=0{,}512;$$

$$P(3,1)=C_3^1 p^1 q^2 = 3\cdot 0,2\cdot 0,8^2 = 0,384\,;$$
$$P(3,2)=C_3^2 p^2 q^1 = 3\cdot 0,2^2\cdot 0,8 = 0,096\,;$$
$$P(3,\ 3)=C_3^3 p^3 q^0 = 1\cdot 0,2^3\cdot 1 = 0,008\,.$$

Внесём полученные результаты в таблицу, называемую таблицей ***биномиального распределения***:

m	0	1	2	3
$P(3,m)$	0,512	0,384	0,096	0,008

Отметим, что сумма вероятностей во второй строке равна 1 (покажите). Вместе с этим

$$\sum_{m=0}^{n} P(n,m) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = (p+q)^n = 1$$

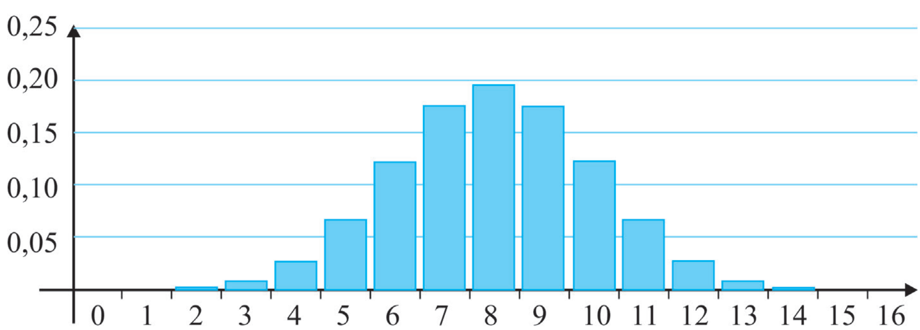
Пример 4. Согласно статистическим данным, вероятность рождения ребёнка-мальчика приблизительно равна p=0,515. Вероятность того, что из 10 новорожденных 6 являются мальчиками, равна.

$$P(10,6)=C_{10}^6(0,515)^6(0,485)^4 \approx 0,2167\,.$$

Пример 5. Пусть в схеме Бернулли, состоящей из 16 испытаний, вероятность события A в каждом испытании равна $p=0{,}5$. В этом случае таблица биномиального распределения имеет следующий вид (точность 3 знака после запятой):

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(S=m)$	0	0	0,002	0,009	0,028	0,067	0,122	0,175	0,169	0,175
m	10	11	12	13	14	15	16			
$P(S=m)$	0,122	0,067	0,028	0,009	0,002	0	0			

Построим соответствующую этим данным столбиковую диаграмму



Видно, что вероятности распределены симметрично относительно значения 0,196. При этом вероятность того, что событие A наступило ровно 8 раз, является наибольшей.

Пример 6. Вероятность того, что деталь бракована, равна 0,01. Наугад выбираются 100 деталей. Тогда вероятность того, что более 3-х деталей бракованы, равна $P(100,0)+P(100,1)+P(100,2)=C_{100}^{0}(0,01)^{0}(0,99)^{100}+$

$$+C_{100}^{1}(0,01)^{1}(0,99)^{99}+C_{100}^{2}(0,01)^{2}(0,99)^{98}\approx 0,9816\ .$$

Случайная величина. Величина, принимающая в результате опыта то или иное значение, называется *случайной величиной*.

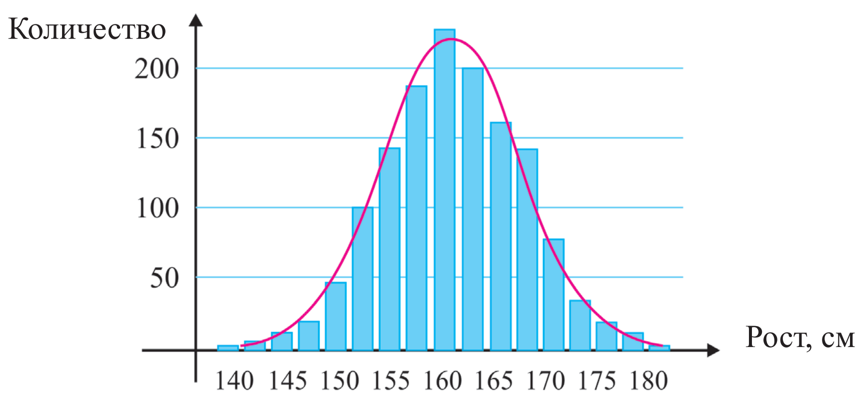
Приведем несколько примеров случайной величины.

1. Количество очков, выпавшее при подбрасывании игрального куба.
2. Рост случайно выбранного человека в сантиметрах.
3. Число такси, заехавших на стоянку в течение одного часа.
4. Время бесперебойной работы телевизора.
5. Число бракованных деталей среди наугад выбранных 100 деталей.
6. Масса (рост) ученика 11-го класса.
7. Число космических частиц, упавших в течение определённого времени на единицу площади Земли.
8. Число разрывов при проверке качества волокна выбранного сорта хлопка.

Для исследования. 1. Обсудите случайные величины примеров 1–8. Какие значения могут принимать эти величины?

2. Приведите другие примеры случайных величин.

Случайную величину из примера 2 исследовал французский учёный Муавр. Он измерил рост случайно выбранных 1375 женщин и представил полученные статистические данные в виде столбиковой диаграммы:

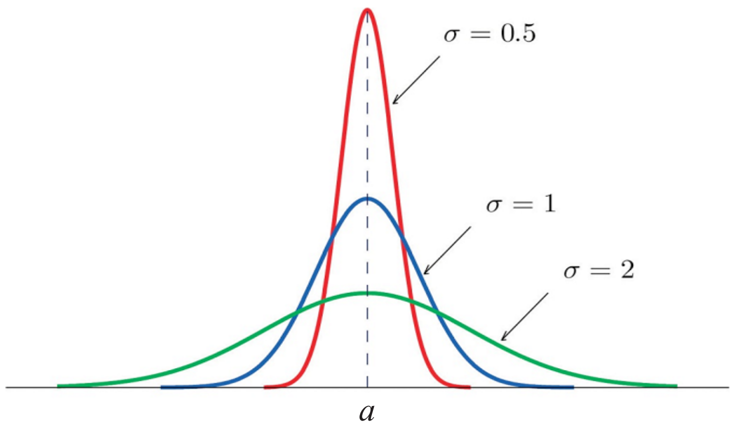


«Колокообразная» кривая, изображённая на диаграмме, приблизительно совпадает с графиком функции

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$
,

здесь a, σ – параметры.

Ниже схематически приведены графики функции $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ при различных значениях a, σ :



Видно, что параметр a является центром множества значений случайной величины, а параметр σ означает стандартное отклонение.

В природе случайные величины такого типа встречаются часто. Поэтому Муавр назвал их *нормально распределенными*.

Если некоторая случайная величина представима в виде суммы большого числа независимых малых случайных величин (факторов), тогда мы можем считать, что данная случайная величина нормально распределена.

Приведем примеры нормально распределенных случайных величин.

1. Отклонения от мишени пуль при стрельбе по ней.

2. Ошибки измерений.

3. Некоторые характеристики живых организмов в популяции.

При достаточно большом числе испытаний в схеме Бернулли биномиальное распределение приближается к нормальному.

Для исследования. Являются ли случайные величины, приведенные выше, нормально распределенными? Приведите другие примеры на нормально распределенные случайные величины.

Типовая контрольная работа

1. В мешке находится 25 яблок, из них 8 красного цвета, а остальные – зелёного. Найдите вероятность, что наугад извлечённое яблоко красного цвета.

2. В сборнике тестов по биологии 25 вопросов. Из них 2 по генетике. Найдите вероятность того, что наугад выбранный вопрос не по генетике.

3. Ученик наугад произнёс число, не большее 100. Найдите вероятность того, что оно кратно 5.

4. Найдите вероятность того, что при подбрасывании монеты 3 раза 2 раза выпадет герб, а один раз – решка.

5. Вероятность попадания стрелком в мишень равна 0,9. Он выстрелил трижды. Найдите вероятность того, что все три выстрела попали в мишень. Найдите вероятность того, что стрелок ни разу не попал в цель.

Упражнения

114. Вероятность попадания стрелка при однократной стрельбе в мишень равна 0,8. Найдите вероятность того, что при 6-кратной стрельбе он попадет в мишень ровно 4 раза.

115. 4 стрелка независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Вероятность попадания в цель каждого стрелка равна 0,25. Найдите вероятности следующих событий:

a) в цель попал один стрелок;
b) в цель попали 2 стрелка;
c) в цель попали 3 стрелка;
d) в цель попали 4 стрелка;
e) ни один стрелок не попал в цель.

116*. Агрегат состоит из 10 блоков. Вероятность выхода из строя каждого блока равна q. Блоки выходят из строя независимо друг от друга:

Найдите вероятности следующих событий
a) вышло из строя 2 блока;
b) вышло из строя более одного блока;
c) вышел из строя хотя бы один блок.

ГЛАВА IV. ПОВТОРЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА

86-93 ПОВТОРЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА

1. Решите уравнения:

1) $3(0,75x+\frac{6}{5})-2x=\frac{1}{4}x+2,5$; 2) $7x(2,5-x)\left(1\frac{2}{3}x+3\right)=0$;

3) $(x+1)(x-1)(x-2)-(x^2+7x)(x-4)-2=2x$;

4) $\frac{x^2-4}{x-2}=4$; 5) $\frac{x^2-5x+4}{x-1}=x+1$; 6*) $\frac{8}{x^2-6x+8}+\frac{1-3x}{2-x}=\frac{4}{x-4}$;

7*) $x^3-3x^2-4x+12=0$; 8*) $24x^4+16x^3-3x-2=0$;

9*) $2x^4-5x^3-18x^2+45x=0$; 10) $x^6-x^4-9x^2+9=0$;

11*) $(x+1)(x^2+2)+(x+2)(x^2+1)=2$.

2. При каких значениях a уравнение $(5-a)x=a-5$ имеет бесконечно много решений?

3. Первое число больше другого на 15%. Если прибавить к меньшему числу 16 и вычесть из большего числа 32, то получим равенство. Найдите эти числа.

4. Решите уравнения, вводя новую переменную:

1) $(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)=8$; 2) $(x^2+2x)^2+(x+1)^2=57$;

3) $(x^2-5x+7)^2-(x-3)(x-2)=1$; 4) $\frac{21}{x^2-4x+10}=x^2-4x+6$;

5) $\frac{3x+7}{5x-1}+\frac{5x-1}{3x+7}=5,2$; 6*) $\frac{x^2-x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$; 7) $\frac{3x^2}{(x-1)^2}-\frac{5x}{x-1}=2$.

5. Решите систему уравнений методом подстановки:

1) $\begin{cases} x-6y=-2, \\ 2x+3y=11; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x+3y+1}{y}-\frac{y-3x+3}{2(x-2)}=2, \\ y-x=1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-y=1, \\ x^3-y^3=7. \end{cases}$

6. Решите систему уравнений методом сложения:

1) $\begin{cases} \frac{3x}{4}+\frac{y}{2}=2, \\ \frac{y}{5}-\frac{x+y}{2}=-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y^2=3, \\ 3x+y^4=4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y^2=20, \\ xy=8. \end{cases}$

7. Решите систему уравнений методом введения новых переменных:

1) $\begin{cases} xy = 5, \\ \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{13}{6}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} - \dfrac{10}{x-y} = 1, \\ \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{2}{x-y} = -\dfrac{3}{5}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3xy - 11\dfrac{x}{y} = 4, \\ 2xy - 3\dfrac{x}{y} = 20. \end{cases}$

8. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^3 + x^2y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x - xy + y = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + 2y + 1 = 0, \\ y^2 + 2x + 1 = 0; \end{cases}$

4*) $\begin{cases} x^3 - xy^2 = 10, \\ y^3 - x^2y = 5; \end{cases}$ 5*) $\begin{cases} (x+y)^3 + (x-y)^2 = 27 \\ (x-y)^3(x+y)^2 = 9. \end{cases}$

9. Пусть $(x;\ y)$ решение системы уравнений $\begin{cases} 2x + 5y = 12, \\ 3x - 4y = -5 \end{cases}$. Найдите x^2+y^2.

10. Сколько решений имеет система уравнений: $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 19, \\ y - 2x = 6? \end{cases}$

11. Найдите число решений системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18, \\ x^2 - y^2 + x - y = 6. \end{cases}$$

12. Найдите наименьшее целое решение неравенства: $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x-2}{6} > 1.$

13. Сколько целых решений имеет неравенство: $x^2 \le 2.$

14. Решить неравенства: 1) $|x-1| \ge 2$; 2) $x^2 - 7x + 10 < 0$;

3) $\dfrac{1}{2x} > 3$; 4*) $x^3 - 3x^2 - x + 3 > 0$; 5) $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x-1} \le 0$;

6) $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} \le 0$; 7*) $\dfrac{(x-4)(x-5)^2}{x-7} < 0$; 8*) $\dfrac{x^4 + 2x^3 - x - 2}{3x^2} \ge 0$.

15. Решите систему неравенств: 1) $\begin{cases} -2x^2 + 5x - 3 \ge 0, \\ 5x - 6 < 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{x-1} \ge 0, \\ \dfrac{x^2 - 3}{3x+5} \le 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2 - 1}{5} + \dfrac{x}{2} < \dfrac{2(x-1)^2}{10} + \dfrac{x-1}{2} + 3, \\ 1 - x > \dfrac{0,5(x-1) - 1}{2} - \dfrac{2(x-1) + 4,5}{3}. \end{cases}$

16. Решите двойные неравенства:

1) $1 < \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} \le 6$; 2) $-1{,}25 < \frac{1}{4}(1-3x) \le 1\frac{1}{4}$;

3) $1 < \frac{3x-1}{12} + x + 2 < 3$; 4) $5x - 20 \le x^2 \le 8x$.

17. Найдите точку *C* (*x*; 0), равноудалённую от точек (8; 7) и (–5; 4).

18. Найдите точку *C* (0; *y*), равноудалённую от точек *A* (12; 9) и В (–9; 7).

19. Решите уравнения: 1) $4^{13x+5} = 4^{23-x}$; 2) $7^{14x-3} = 7^{85+5x}$;

3) $6^{x+7} = 36^{3x}$; 4) $8^{x+5} = 128^{2-5x}$; 5) $3^{x+2} - 3^x = 108$;

6) $2^{x+2} + 2^x = 5$; 7) $11 \cdot 16^x + 9 \cdot 12^x - 20 \cdot 9^x = 0$; 8) $9^{x^2-4x} = 243^{2(x^2-15)}$;

9) $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$; 10) $6 \cdot 25^x + 7 \cdot 15^x - 13 \cdot 9^x = 0$; 11) $3^{x+2} + 3^{x-1} + 3^x = 39$.

20. Гражданин внёс в банк сумму 100 000 000 сум под 14% годовых. В конце на его счету оказалось 148 154 400 сум. На сколько лет была внесена сумма?

21. Предприниматель внёс в банк сумму 100 000 000 сум под 16% годовых. В конце на его счету оказалось 181 063 936 сум. На сколько лет была внесена сумма?

22. Известно, что население города увеличивается на 2% за год. Через сколько лет население города удвоится?

23. Известно, что население города уменьшается на 1% за год. Через сколько лет население города уменьшится на 10 %?

24. Решите неравенства: 1) $\sqrt{3x-13} > 15$; 2) $\sqrt{2x+23} > -17$;

3) $\sqrt{2x+25} \ge -27$; 4*) $\sqrt{x^2+5x+14} > x-18$;

5*) $\sqrt{x^2-3x+22} > x+23$; 6*) $\sqrt{x^2-5x+26} \le x-23$;

7*) $\sqrt{x^2-13x+44} \le x-36$; 8*) $\sqrt{x^2-25x+34} \ge \sqrt{x^2-3x+23}$.

25. 1) На плоскости заданы точки *A* (12; 4), *B* (–23; 5), *C* (*x*; *y*). Найдите геометрическое место точек, удовлетворяющих условию *AC*=*BC*; 2) На плоскости заданы точки *A* (24; 34), *B* (–25; 37), *C* (*x*; *y*). Найдите геометрическое место точек, удовлетворяющих условию *AC*=*BC*.

26. Решите неравенства: 1) $4^x \ge 64$; 2) $3^x \le 81$; 3) $(0{,}5)^x < \frac{1}{64}$;

4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x} < \frac{1}{27}$;   5) $3^{6-x} > 3^{3x-2}$;   6) $2^{9x-x3} > 1$;   7) $0,4^{x^2-x-20} > 1$.

27. Вычислите: 1) $\log_2 4$;   2) $\log_{0,5} 0,25$;   3) $6^{\log_6 50}$;   4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+2\log_{\frac{1}{7}} 3}$;

5) $4^{\log_4 5-\log_4 5}$;   6) $16^{0,5\log_4 10}$;   7) $\frac{4}{5}(1+9^{\log_3 8})^{\log_{65} 5}$;

8) $27^{\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} 0,5-\log_{27} 2}$;   9) $5^{\log_{\sqrt{5}} 4+\log_5 3}$;   10*) $3\log_2 \log_4 16 + \log_{0,5} 2$.

28. Сравните числа:1) $\log_6 7$ или $\log_7 6$; 2*) $\log_{0,4} 0,5$ или $\log_{\sqrt{2}} \sin\frac{\pi}{2}$.

29. Найдите область определения функции:

1) $y = \log_3(4-5x)$;   2) $y = \log_{0,1}(x^2-3x-4)$;   3) $y = \lg\frac{x^2+4x}{x^2-3x-4}$.

30*. Выразите b через a и c:

1) $b = \log_5 6,\ a = \log_2 3,\ c = \log_2 10$;

2) $b = \log_{30} 8,\ a = \log_{30} 3,\ c = \log_{30} 5$.

31. Решите уравнения: 1) $\log_3 x = \log_3 1,5 + \log_3 8$;

2) $\log_{0,3} x = 2\log_{0,3} 6 - \log_{0,3} 12$;   3) $\log_2(x^2+4x+3) = 3$;

4) $\log_5(x+1) + \log_5(2x+3) = 1$;   5) $\lg^2 x = 1$;   6) $x^{\log_2 x} = 8$;

7) $\log_5^2 x + \log_{0,2} x = 2$;   8*) $\frac{1}{\lg x - 6} + \frac{5}{\lg x + 2} = 1$;

9*) $\log_2(9^{x-1}+7) = 2 + \log_2(3^{x-1}+1)$.

32. Решите неравенства: 1) $\log_3(12-2x-x^2) > 2$;

2) $\log_4(x+1) + \log_4 x < \log_4 2$;   3) $\log_5(x-3) < 2$;

4) $\log_{0,5}(2x-4) > -1$;   5) $\log_{0,5} x^2 > \log_{0,5} 3x$;

6) $3^{\log_2 \frac{3x-1}{x}} < 1$;   7*) $(5x-2)\log_{0,(3)} x < 0$.

33. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2^{\log_2(3x-4)} = 8, \\ \log_9(x^2-y^2) - \log_9(x+y) = 0,5. \end{cases}$$

34*. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} (x-1)\lg 2 + \lg(2^{x+1}+1) < \lg(7\cdot 2^x + 12), \\ \log_x(x+2) > 2. \end{cases}$$

35. Расположите в порядке возрастания:

$\sin 30°;\ \cos 30°;\ \cos 180°;\ \sin 90°;$

2) $\sin 45°;\ \cos(-90°);\ \sin 210°;\ \cos(-45°)$.

36. Упростите: 1) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-2$;

2*) $\dfrac{\sin 90°-\mathrm{tg}(45°+\alpha)\mathrm{tg}(45°+3\alpha)}{\mathrm{tg}(45°+\alpha)+\mathrm{ctg}(45°-3\alpha)}+\mathrm{tg}4\alpha$.

37. Найдите значение при заданном условии::

1) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{3}{4}$; 2) $\dfrac{3\sin^2\alpha+12\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}$, $\mathrm{tg}\alpha=2$.

38. Найдите значения тригонометрических функций:

1) $\sin\alpha=-0{,}6$, $270°<\alpha<360°$;

2) $\mathrm{tg}\alpha=2$, $180°<\alpha<270°$.

39. Приведите к виду произведения: 1) $\sin2\alpha+\sin\alpha$;

2) $\cos x-\cos 3x$; 3) $\mathrm{tg}3x-\mathrm{tg}x$; 4) $\cos 2x-\cos 4x-\cos 8x$.

40. Решите уравнения: 1) $\sin 3x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 2) $\sin\dfrac{x}{2}=1{,}5$;

3) $\cos 2x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\cos\dfrac{x}{2}=1{,}5$; 5) $\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2}-30°\right)=0$;

6) $\mathrm{tg}(3x+60°)=\sqrt{3}$; 7) $\mathrm{tg}4x=3$; 8) $\mathrm{ctg}\left(\dfrac{x}{2}-30°\right)=0$;

9) $\sin^2 x-2\sin x-3=0$; 10) $\cos 2x=7\sin x$;

11) $\cos^2 x+4\sin^2 x=2\sin 2x$; 12) $7\mathrm{tg}^2x-2\mathrm{tg}\,x=15$;

13*) $\sin^2 x-\cos^2 2x+\sin^2 3x=1{,}5$; 14*) $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{7}{8}$.

41. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases}\cos(x+y)=0,\\ \cos(x-y)=\dfrac{\sqrt{3}}{2};\end{cases}$ 2*) $\begin{cases}\cos x\cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{4},\\ \sin x\sin y=\dfrac{\sqrt{3}}{4};\end{cases}$ 3*) $\begin{cases}\sin x\sin y=\dfrac{3}{4},\\ \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y=3.\end{cases}$

42. Решите неравенства:

1) $\sin x>\dfrac{1}{2}$; 2) $\sin x<\dfrac{1}{2}$; 3) $\sin x\ge-\dfrac{1}{2}$; 4) $2\cos x>1$;

5) $\sin 3x\cos x+\cos 3x\sin x\ge\dfrac{1}{2}$; 6) $\cos 2x\le-1$; 7) $2\cos 2x\ge1$;

8*) $\mathrm{tg}^2x-\dfrac{1}{4}\mathrm{tg}x-\dfrac{3}{4}\le0$; 9) $\mathrm{tg}^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\le\sqrt{3}$.

43. Пусть задана арифметическая прогрессия 2, 5, 8... Найдите 15 – ый член и сумму первых 15 членов.

44. Пусть $a_3=25$, $a_{10}=-3$. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии.

45. Найдите сумму всех двузначных натуральных чисел, кратных 3.

46. Пусть задана геометрическая прогрессия – 4, 16, – 64... Найдите 7 – ой член и сумму первых 7 членов.

47. Пусть $b_3=8$, $b_7=128$. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии.

48. Найдите сумму:

1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$; 2) $\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}+\ldots$; 3*) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-\ldots$.

49. Для функции $y=x^2$ найдите Δx и Δy:

1) $x=2,5$ и $x_0=2$; 2) $x=3,9$ и $x_0=3,75$;

3) $x=-1,2$ и $x_0=-1$; 4) $x=-2,7$ и $x_0=-2,5$.

50. Найдите производную:

1) $y=4x^3-2x^2+x-5$; 2) $y=-x^3+9x^2+x-1$;

3) $y=0,25x^4+0,(3)x^3+0,5x^2-1$; 4) $y=(x^3-1)(x^2+x+1)$;

5) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$; 6) $y=(x^3-1)^6$; 7) $y=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$; 8) $y=\frac{1+\cos x}{\cos x-1}$;

9) $y=\cos x^3$; 10) $y=\cos\frac{1}{x^2}$; 11) $y=\operatorname{tg}(2x^2+1)$;

12) $y=\lg(5x^2+1)$; 13*) $y=\ln^2(x^2-1)$;

14) $y=2\cdot 5^x+3e^x$; 15) $y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$.

51. Найдите критические точки, промежутки монотонности, экстремумы, а также уравнение касательной, проходящей через точку с абциссой $x=-2$: 1) $y=-x^2-2x$; 2) $y=x^3+3x^2$; 3) $y=0,5x^4$.

52. Найдите первообразную:

1) $y=-7x+4$; 2) $y=3x^2+4$; 3) $y=2x^2+3x-8$;

4) $y=\frac{1}{x^2}-4\sin x$; 5) $y=1-\cos 3x$; 6) $y=x^2+\sqrt{x}$;

7) $y=\frac{2}{\sin^2 3x}$; 8) $y=\frac{3}{\cos^2 5x}$; 9) $y=7\sin\frac{x}{3}+\frac{2}{\cos^2 4x}$;

10) $y=\frac{1}{\sqrt{3x-2}}$; 11) $y=\frac{5}{\sqrt{2x+7}}$; 12) $y=\frac{6}{(5x-7)^3}$;

13) $y=\dfrac{2}{4x-1}$; 14) $y=e^{2x-3}$; 15) $y=2^{0,5x+1}$.

53. Найдите площади фигуры, ограниченной заданными кривыми:

1) $y=x^2,\ \ y=0,\ \ x=2;$ 2) $y=-\sqrt{x},\ \ y=0,\ \ x=1;\ \ x=9;$

3) $y=\dfrac{2}{x},\ \ y=0,\ \ x=1,\ \ x=3;$ 4) $y=\sin x,\ \ y=0,\ \ 0\le x\le\pi;$

5) $y=\dfrac{1}{x\ln 2},\ \ y=0,\ \ x=1,\ \ x=4.$

54. Вычислите интегралы:

1) $\int\limits_{-2}^{2}x^3dx$; 2) $\int\limits_{-\pi}^{2}\sin xdx$; 3) $\int\limits_{-3}^{2}4x^3dx$;

4) $\int\limits_{0}^{2}\left(3x^2-4x+5\right)dx$; 5) $\int\limits_{1}^{4}\left(x-2\sqrt{x}\right)dx$; 6) $\int\limits_{-1}^{1}(x+1)^2\,dx$;

7) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x+60°)dx$; 8) $\int\limits_{0}^{2}\left(3x^4+2x^2-5\right)dx$;

9) $\int\limits_{4}^{9}\left(\dfrac{2x}{5}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$; 10) $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{2}\dfrac{dx}{\cos^2(2x+60°)}$; 11) $\int\limits_{-4}^{2}\dfrac{xdx}{\sqrt{2-0,5x}}$.

Типовая контрольная работа

1. Найдите производную: $y=(x^2-5x+8)^6$.

2. Найдите экстремумы функции: $y=2x^3-9x^2+12x-8$.

3. Найдите уравнение касательной к графику функции $y=2x^2-5x+4$, проходящей через точку с абциссой $x=3$.

4. Найдите первообразную: $y=8(11-3x)^5$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной заданными кривыми:

$y=x^2-7x+10,\ \ y=10$.

6. Вычислите интеграл: $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{2}\mathrm{tg}2xdx$.

7. При подбрасывании двух игральных кубов выпадают два числа. Найдите вероятность события «образованное из них двузначное число кратно 4».

Глава II

51. $5\frac{1}{4}$. **52.** $2\frac{1}{3}$. **53.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $1\frac{2}{3}$; 3) 9; 4) $\frac{1}{4}(a^2-1)$.

54. 1) $9\frac{2}{3}$; 2) $7\sqrt{3}-1$; 3) $4\frac{3}{4}$; 4) $2\sqrt{\ln 3}$. **55.** $V=\frac{\pi^2}{2}$ (куб.ед.).

56. 7,5π (куб.ед.). **57.** 340 м. **58.** 18,75 м. **59.** 120 м.

60. 32 м. **61.** $V=2\pi$ (куб.ед.). **62.** 1) 18; 2) $\frac{8}{3}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $\frac{8}{9}$.

63. 1) $\frac{1}{3}$; 2) 1; 3) $\frac{3\pi-4}{4}$; 4) $\frac{6e-5}{3}$. **64.** $\frac{64}{3}$. **65.** 18. **66.** 0,009 Дж.

67. $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2)-s(t_1)$. **68.** $\frac{\pi}{3}$. **69.** $17\frac{1}{15}\pi$. **70.** ≈0,8099 (формула (1)).

71. ≈ 0,7599 (формула (1а)). **72.** 0,7850 (формула трапеции).

74. 1) $y=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$; 2) $y=\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$. **75.** 2) $y=\frac{C}{x}$. **77.** $C=2$.

78. 60 минут. **80.** 1) $\frac{m_0}{\sqrt[10]{2}}$; 2) $\frac{m_0}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{m_0}{4}$.

83. $y'=-0{,}2\cdot(y-3)$; $y=3+C\cdot e^{-0{,}2t}$. **84.** 1), 3).

85. 1), 2). **86.** 1) $f_3(x)$; 2) $f_2(x)$; 3) $f_2(x)$.

88. 2) $\ln(e^x+1)+C$; 3) $\operatorname{arctg}(x+2)+C$; 5) $\frac{1}{\cos x}+C$.

89. 2) $\frac{1}{3}x^3-x+C$; 4) $-\frac{1}{3}\ln|\cos 3x|+C$; 6) $\ln\left|x(x^2+2)\right|+C$.

93. 2) $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{2}{3}$; 4) $F(x)=-\cos x-\sin x+2$.

96. 1) $F(x)=\frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{8}+C$; 2) $F(x)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3 x}+C$;

3) $F(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}}+\frac{3}{5}\cos x\sqrt[3]{\cos^2 x}+C$; 4) $F(x)=\ln|\sin x|-\sin x+C$;

5) $F(x)=-\ln|\cos x-\sin x|+C$; 6) $F(x)=\frac{1}{6}\sin 6x+\frac{1}{4}\sin 4x+C$.

98. 3) $\operatorname{arctg}2-\frac{\pi}{4}$. **99.** 1) $\sqrt{2}-1$; 2) $1-\frac{1}{e^2}$.

100. 2) 1; 3) $\ln\sqrt{10}$. **101.** 1) $a=2$; 2) $a=4$. **102.** 1) 24; 2) 32; 3) 0,5

103. 1) 1120,4; 3) 2; 43) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **109.** $6\frac{2}{3}$. **110.** 1) 8; 2) $10\frac{2}{3}$. **111.** 1) $2\frac{2}{3}$; 2) 60. **112.** 1) $21\frac{1}{3}$; 2) $2e^3+1$. **113.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $1\frac{1}{6}$. **115.** 1) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$; 2) 36; 3) 36; 4) e^2-1.

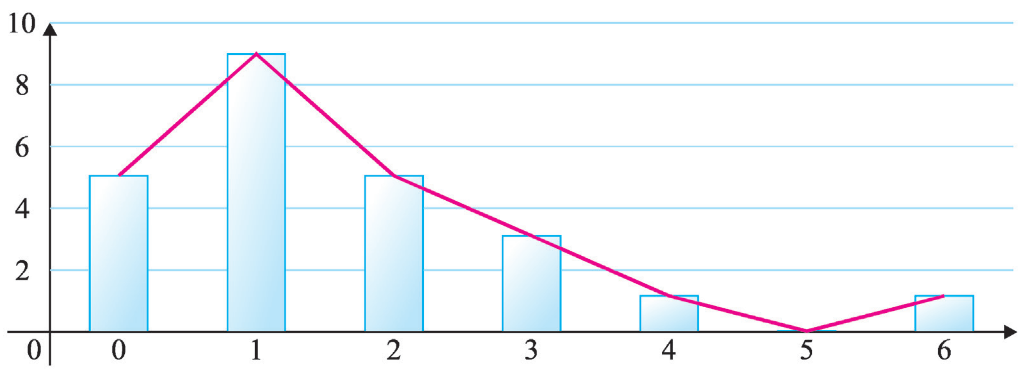
116. 1) $\frac{v_0^2}{2g}$ метр. **118.** 64,5 метр. **120.** $A=\frac{\pi R^2H^2g}{2}J$.

Глава III

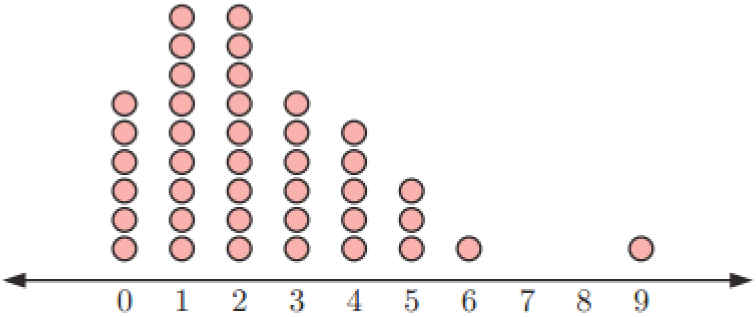
1. 6. **2.** 18. **3.** 3. **4.** 24. **5.** 10+4+6=20. **6.** $24=6\cdot4$. **7.** $7\cdot5\cdot4=140$. **8.** 24. **9.** $6\cdot5\cdot4=120$. **10.** $20=5\cdot4$. **11.** $18\cdot17/2=153$. **12.** C_n^3. **13.** C_7^4. **14.** a) $C_{10}^1C_{11}^2+C_{10}^2C_{11}^1$. b) $C_{10}^1C_{11}^3+C_{10}^2C_{11}^2+C_{10}^3C_{11}^1$.

15. $C_m^2C_n^2$. **16.** $\frac{n(n-1)}{2}$. **19.** –165; **21.** 824;
23.

Число голов	Счёт	Частота	Относительная частота
0	~~||||~~	5	0.208
1	~~||||~~ ||||	9	0.375
2	~~||||~~	5	0,208
3	|||	3	0,125
4	|	1	0,042
5		0	0
6	|	1	0,042
	Всего:	24	



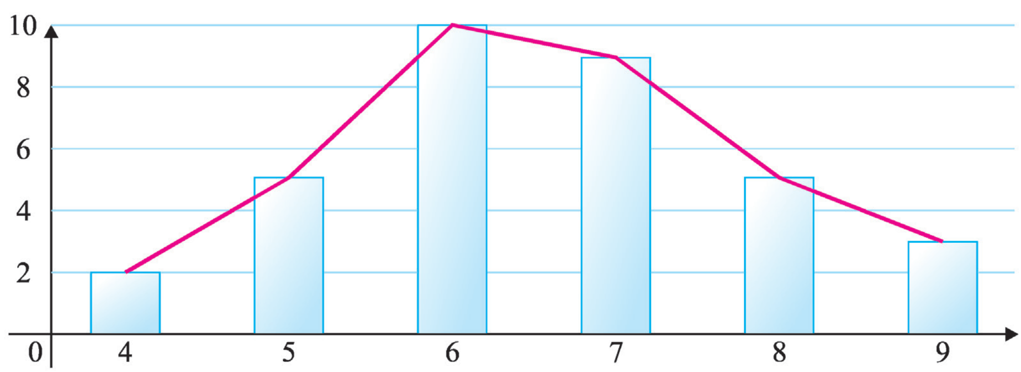
24. a)



b) 1 и 2; c) положительная зависимость; d) 12,5%.

25.

4	||	2	0,059
5	𝍸	5	0,147
6	𝍸 𝍸	10	0,294
7	𝍸 ||||	9	0,265
8	𝍸	5	0,147
9	|||	3	0,088



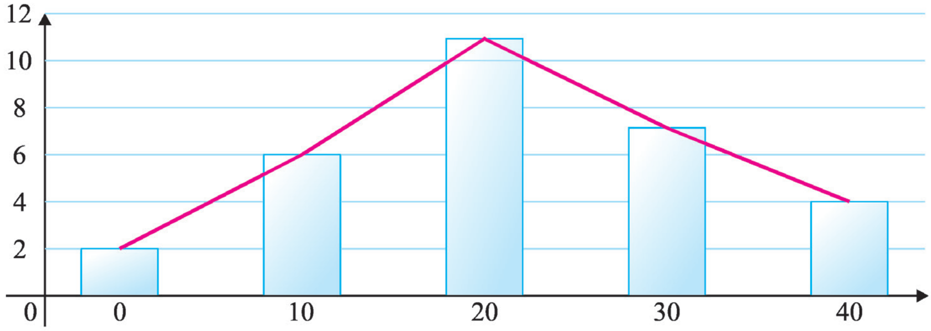
26. a) 45; b) 1; c) 8; d) 20%.

27. a)

0 – 9	||	2	0,067
10 – 19	𝍸 |	6	0,200
20 – 29	𝍸 𝍸 |	11	0,367
30 – 39	𝍸 ||	7	0,233
40 – 49	||||	4	0,133

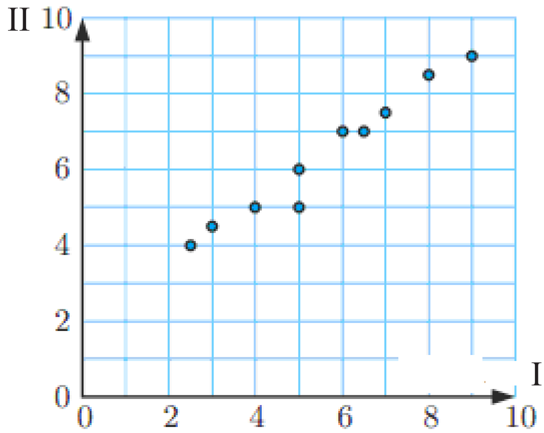
b) 2;

c) 36,7%;
e)



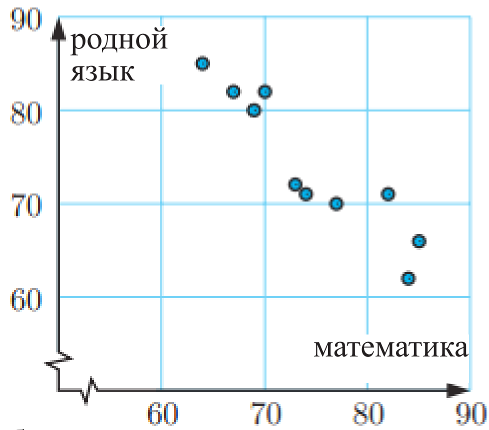
29. a) I) 5,61; II) 6; III) 6. b) I) 16,3; II) 17; III) 18. c) I) 24,8; II) 24,9; III) 23,5. **30.** a) A:6,46; B:6,85. b) A:7; B:7. d) 7 – среднее для обеих выборок. **31.** Второй спортсмен – 164. **32.** a) 1; b) 1,8; c) 2. **33.** a) 44; b) 44; c) 40,2; d) Возрастает, 40,3. **38.** 31,7. **39.** a) 70; b) Приблизительно 411000 *l*; c) Приблизительно 5870 *l*. **40.** a) 11,5; b) I) 11,3; II) 11,4. **41.** a)125; b) 119; c) 12%; d) 137. **44.** Среднее значение – 1,72; Стандартное отклонение – 1,67. **45.** Среднее значение – 14,5; Стандартное отклонение – 1,75. **46.** Среднее значение – 45; Стандартное отклонение – 3,28. **52.** a) слабая положительная зависимость, линейная; b) сильная положительная зависимость, линейная; c) нет зависимости; d) сильная отрицательная зависимость, нелинейная; f) слабая положительная зависимость, нелинейная.

53.



Сильная положительная зависимость, когда результаты, выставленные судьёй I, возрастают, то результаты, выставленные судьёй II, также возрастают.

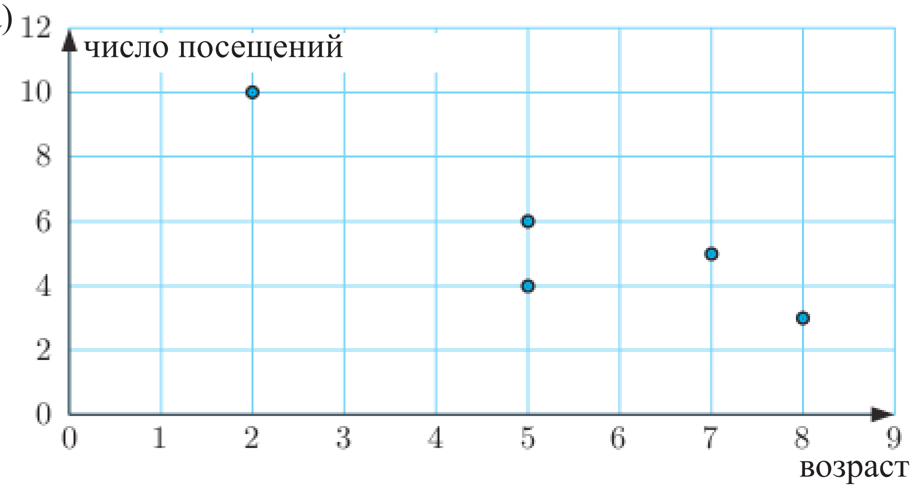
54.



Слабая отрицательная зависимость.

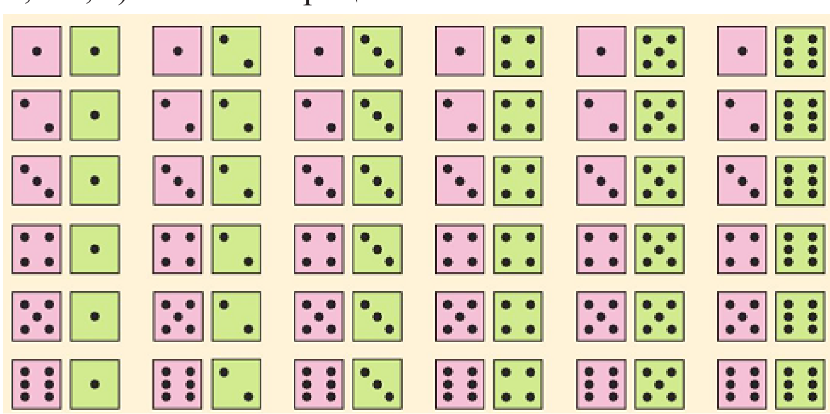
55. a) средняя положительная зависимость. **56.** a) *b*; b) *a*; c) *d*; d) *c*; e) *e*;
57. a) $r=1$; b) $r=-1$; c) $r=0$.

58. a)



b) –0,892; c) Сильная отрицательная зависимость.

64.



65. 8 возможностей: *GGG; GGR; GRG; RGG; GRR; RGR; RRG; RRR*.

Глава IV

1. 4) $\varnothing$; 5) $\varnothing$; 7) 2; 3; –2; 11) –2. **2.** 5. **4.** 1) 1; 2; –1; 4. 6) 0; 1. **5.** 1) (4; 1); 3) (2; 1); (1; –2). **6.** 2) (1; 1); (1; –1); $\left(\frac{5}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{5}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) (4; 2); (–4; –2); (4; –2); (–4; 2); (2; 4); (–2; –4); (2; –4); (–2; 4). **7.** 1) (5; 1); (–5; –1). **8.** 1) (2; 1); (–2; 5); 2) (5; 1); (1; 5). **9.** 5. **10.** 2. **11.** 4. **12.** 2. **13.** 3 ta. **14.** 3) $(0; \frac{1}{6})$; 5) $(-\infty;1) \cup \{3\}$; 6) $(-\infty; -3) \cup (0; 3]$. **19.** 1) $\frac{9}{7}$; 4) $-\frac{1}{38}$; 6) 0; 7) 0; 9) 2. **24.** 1) $\left(\frac{238}{3}; +\infty\right)$; 2) $\varnothing$; 3) (–12,5; +∞). **26.** 1) [3; +∞); 2) (–∞; 4]; 3) (6; +∞); 5) (–∞; 2). **27.** 1) 2; 3) 50; 6) 10; 7) 4. **28.** 1) $\log_6 7 > \log_7 6$. **29.** 1) (–∞; 0,8); 2) $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$. **30.** 1) $\frac{1+a}{c-1}$; 2) $\frac{3(1-a)}{1+c}$. **31.** 1) 12; 2) 3; 3) –5; 1; 5) 10; 0,1; 8) 100; 100 000 000. **32.** 1) (–3; 1); 2) (0; 1); 3) (3; 28); 5) (0; 3). **33.** (4; 1). **34.** (1; 2). **35.** 1) cos180°; sin30°; cos30°; sin90°. **36.** 1) 0. **37.** 1) $\frac{12}{7}$. **39.** 2) $2\sin 2x \sin x$. **40.** 1) $(-1)^{n+1}15°+60°n$, $n\in Z$; 5) $\varnothing$; 6) $60°+360°n$, $n\in Z$; 9) $240°+360°n$, $n\in Z$; 10) $-90°+360°n$, $n\in Z$. **42.** 5) $(7°30'+90°n;\ 37°30'+90°n)$, $n\in Z$. **48.** 1) 2. **50.** 1) $12x^2-4x+1$; 3) x^3+x^2+x; 7) $18x^2(x^3-1)^5$. **51.** 2) возрастает: $(-\infty;-2)\cup(0; +\infty)$; убывает: (–2; 0); экстремумы: –2 и 0; уравнение касательной: $y=-6x-8$. **52.** 2) x^3+4x+c; 5) $x-\frac{\sin 3x}{9}+C$. **54.** 3) –81; 4) 10; 7) $\frac{1}{2}$.

Список использованной и рекомендованной литературы

1. *Алимов Ш.А и др.* Алгебра и начала математического анализа: Учебник для 10–11 класса. Учебник для базового и профильного образования, – Москва: Просвещение, 2016.
2. Mal Coad and others. Mathematics for the international students. Mathematical Studies SL 2nd edition. Haese and Harris publications. 2010.
3. *Колмогоров А.Н и др.* Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для 10–11 классов. – Москва: Просвещение, 2018.
4. *Сайдаматов Э. и др.* Алгебра и основы математического анализа. Часть 2. Учебное пособие, – Ташкент, “Ilm ziyo”, 2016.
5. *Abduhamidov A.U va boshqalar.* Algebra va matematik analiz asoslari, 1- qism, Toshkent, “O‘qituvchi”, 2012.
6. *Филичева Н.П.* Уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие. – Рязань, 2009.
7. *Исроилов М.И.* Ҳисоблаш методлари. – Тошкент: Ўқитувчи, 1988.
8. *Муравин Г.К. и др.* Алгебра и начала анализа: Учебник для 10 класса. – Москва: Дрофа, 2006.
9. Алгебра. Учебное пособие для 9–10 классов. Под ред. Н.Я. Виленкина. – Москва: Просвещение, 2004.
10. *Бевз Г.П.* и др., Алгебра и начала анализа: Учебник для 11 класса. – Киев, 2011.
11. http://www.ams.org/mathweb/ – веб–Математика (на английском языке).
12. Журнал “Математика в школе”.
13. Fizika, matematika va informatika. Научно-методический журнал (выходит с 2001 года).
14. *Mirzaahmedov M.A., Ismailov Sh.N.* Matematikadan qiziqarli va olimpiada masalalari. I qism, Toshkent, “Turon-Iqbol”, 2016.
15. Matematikadan qo‘llanma, I va II qismlar. O‘qituvchilar uchun qo‘llanma. Prof. T.A. Azlarov tahriri ostida. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1979.
16. *Mirzaahmedov M.A., Sotiboldiyev D.A.* O‘quvchilarni matematik olimpiadalarga tayyorlash. – Toshkent, “O‘qituvchi”, 1993.
17. *Mirzaahmedov M.A., Ismailov Sh.N.* 10-sinf uchun “Algebra va analiz asoslari”dan testlar, G‘.G‘ulom NMIU, – Toshkent, 2018.
18. *Говоров В.М. и др.*, Сборник конкурсных задач по математике, М., Наука, 1984.

19. *Azlarov T.A., Mansurov X.* Matematik analiz asoslari. 3-nashr, “Universitet”, – Toshkent, 2005.
20. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – Москва: Наука, М., 1990.
21. *Силм А.Ш.*, Математикадан тест саволлари, – Тошкент, 1996.
22. Материалы ЕГЭ по математике, М., 2016.
23. *Кузнецова Е.П., Муравьева Г.А.* Сборник задач по алгебре, 11-класс. – Москва: Мнемозика, 2016.
24. *Мордкович А.Г.*, Сборник задач по алгебре, 10–11 классы. – Москва: Мнемозина, 2016.
25. *Шкиль М.И., Слепкаль З.И.,* Алгебра: Учебник для 11 класса. – Киев, 2016.
26. *Е.П. Нелина, О.Е. Долгова,* Алгебра, учебник для 11 класса. – Киев, 2015.
27. http://www.uzedu.uz – Информационно-образовательный портал Министерства народного образования, Р Уз.
28. http://www.eduportal.uz – Информационно-образовательный портал мультимедийного центра Р Уз.
29. http://www.problems.ru – Система задач по математике.
30. http://matholymp.zn.uz – Математические олимпиады в Узбекистане и мире.

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА II. ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

ГЛАВА III. АНАЛИЗ ДАННЫХ. ВЕРОЯТНОСТЬ

ГЛАВА IV. ПОВТОРЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА