МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ЦЕНТР СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО,
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

АЛГЕБРА И ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Часть I

***Учебное пособие
для учащихся академических лицеев
с углубленным изучением математики***

Издание седьмое, исправленное

ИЗДАТЕЛЬСКО-ПОЛИГРАФИЧЕСКИЙ
ТВОРЧЕСКИЙ ДОМ «O‘QITUVCHI»
ТАШКЕНТ — 2016

УДК : 512(075)
ББК 22.14я722
А 46

Данное издание — победитель Республиканского конкурса в 2008 г. „Лучший учебник года“

Авторы: ***Э. М. Сайдаматов, А. К. Аманов, А. С. Юнусов, С. С. Ходжабагян***

Рецензенты: доктор физико-математических наук, профессор УзНУ имени М. Улугбека *О. Р. Холмухамедов*; кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математики лицея при ТАСИ *М. Маматкулов*; заведующая кафедрой математики академического лицея при ТашИИТ *Н.Э. Абдурахимова*; преподаватели математики Ташкентского профессионального колледжа железнодорожного транспорта *С. Х. Носиров*, *Х. Ю. Юнусбеков.*

Под общей редакцией *Э. М. Сайдаматова*

ISBN 978-9943-22-022-5

ОТ АВТОРОВ

Настоящее учебное пособие «Алгебра и основы математического анализа», часть I написано в соответствии с учебной программой, утвержденной Министерством высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан и Центром среднего специального, профессионального образования 11 августа 2000 г., и предназначено для организации учебного процесса в академических лицеях с углубленным изучением математики.

Книга создана на основе опыта преподавания математики в академических лицеях при Ташкентском институте инженеров транспорта (ТашИИТ), Ташкентском архитектурно-строительном институте (ТАСИ), Ташкентском университете информационных технологий (ТУИТ) и является первым учебным пособием по алгебре и основам математического анализа, написанным на русском языке и соответствующим новой учебной программе.

Часть I состоит из 8 глав:

Глава I. Элементы теории множеств и математической логики;

Глава II. Действительные числа;

Глава III. Комплексные числа и действия над ними;

Глава IV. Многочлены;

Глава V. Алгебраические выражения;

Глава VI. Алгебраические уравнения и неравенства;

Глава VII. Функция и ее график;

Глава VIII. Степенная, показательная и логарифмическая функции.

Каждая глава разбита на параграфы, параграфы — на пункты. Наряду с изложением соответствующих определений, правил и теорем большое внимание в каждом пункте уделено разбору примеров, иллюстрирующих содержание рассматриваемой темы. В конце каждого параграфа даны вопросы на повторение и упражнения. Упражнения разделены на две части горизонтальной чертой. Те упражнения, которые приведены после горизонтальной черты, предназначены для самостоятельной работы. В конце каждой главы даны также упражнения для повторения. Упражнения повышенной сложности отмечены звездочкой. Ответы и указания к упражнениям приведены в конце книги.

Авторы стремились к повышенному уровню строгости и, в то же время, доступному изложению материала. При этом, несомненно, на стиль изложения и качество учебного пособия заметное влияние оказали признанные учебники по алгебре и началам анализа.

Главы I, II написаны доцентом *А. Юнусовым* (ТГПУ имени Низами), главы III–V — *С. Ходжабагяном* (ТУИТ), глава VI — доцентом *А. Амановым* (ТАСИ) и главы VII, VIII — доцентом *Э. Сайдаматовым* (УзНУ имени Мирзо Улугбека).

Авторы выражают свою искреннюю признательность за ценные замечания и советы доктору физико-математических наук, профессору УзНУ имени М.Улугбека *О. Р. Холмухамедову*, кандидату физико-математических наук, заведующему кафедрой математики лицея при ТАСИ *М. Маматкулову*, заведующей кафедрой математики академического лицея при ТашИИТе *Н. Э. Абдурахимовой*, преподавателям математики Ташкентского профессионального колледжа железнодорожного транспорта *С. Х. Носирову* и *Х. Ю. Юнусбекову.*

Авторы надеются, что данное учебное пособие послужит для учащихся хорошим и удобным средством на пути познания основ алгебры и математического анализа.

Мы будем также признательны всем читателям, приславшим свои замечания.

СПИСОК НЕКОТОРЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

$\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел
$\boldsymbol{Z}$ — множество целых чисел
$\boldsymbol{Q}$ — множество рациональных чисел
$\boldsymbol{R}$ — множество действительных чисел
$\varnothing$ — пустое множество
$a \in M$ — элемент a принадлежит множеству M
$\{a, b, c, d\}$ — множество, состоящее из элементов a, b, c, d
$\bigcup$ — знак объединения
$\bigcap$ — знак пересечения
$A \subset B$ — множество A является подмножеством множества B
$[a; b]$ — замкнутый промежуток (отрезок) с началом a и концом b
$(a; b)$ — открытый промежуток с началом a и концом b
$[a; +\infty)$ — бесконечный промежуток с началом a
$A \Rightarrow B$ — из A следует B
$A \Leftrightarrow B$ — из A следует B и, обратно, из B следует A
$a = b$ — a равно b
$a > b$ — a больше b
$a < b$ — a меньше b
$a \geq b$ $(a \leq b)$ — a не меньше (не больше) b
$a \neq b$ — a не равно b
$A \equiv B$ — A тождественно равно B
ОДЗ — область допустимых значений
НОД $(a; b)$ — наибольший общий делитель чисел a и b
НОК $(a; b)$ — наименьшее общее кратное чисел a и b
$|a|$ — абсолютная величина числа a
$[a]$— целая часть числа a
$\{a\}$ — дробная часть числа a
$\min(a; b)$ — наименьшее из чисел a и b
$\max(a; b)$ — наибольшее из чисел a и b
$\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$ — позиционная запись натурального числа
$\sqrt[n]{a}$ — корень n-й степени из числа a
$\log_a b$ — логарифм числа b по основанию a
$\lg b$ — логарифм числа b по основанию 10
$\ln b$ — логарифм числа b по основанию e
$e = 2{,}87 \ldots$
$\pi = 3{,}1415 \ldots$ — отношение длины окружности к ее диаметру
i — мнимая единица $(i^2 = -1)$
$\operatorname{Re} z$ — действительная часть комплексного числа z
$\operatorname{Im} z$ — мнимая часть комплексного числа z
$\overline{z}$ — число, сопряженное числу z
$\operatorname{Arg} z$ — аргумент комплексного числа z
$\arg z$ — главное значение аргумента комплексного числа z
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$
A_n^m — число размещений из n элементов по m
C_n^m — число сочетаний из n элементов по m
P_m — число перестановок из m элементов
[— знак совокупности
{ — знак системы
$\rceil$ — знак отрицания
$\vee$ — знак дизъюнкции
$\wedge$ — знак конъюнкции
$\forall$ — квантор общности
$\exists$ — квантор существования
$D(f)$ — область определения функции f
$E(f)$ — область значений функции f

ГЛАВА I

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

§ 1. Элементы теории множеств

1. Понятие множества. Множество является одним из начальных понятий всей математики. Оно используется для описания совокупности предметов или объектов. Например, можно говорить о множестве всех учащихся данного учебного заведения; о множестве всех треугольников на плоскости. Объекты или предметы, которые составляют множества, называются *элементами* множества.

Множества обычно обозначаются заглавными буквами A, B, ..., X, ... Если a является элементом множества A, то пишут $a \in$ А ; если же a не является элементом множества A, то пишут $a \notin$ А. Например, если Z — множество всех целых чисел, то верны следующие отношения:

$$3 \in Z,\ -5 \in Z, \frac{1}{3} \notin Z,\ \sqrt{3} \notin Z.$$

Обычно, множество задается указанием всех элементов или указанием характеристического свойства, которым обладают все элементы рассматриваемого множества. Пусть множество A состоит только из элементов a, b, c. Тогда элементы множества A будем заключать в фигурные скобки и писать $A = \{a, b, c\}$. При этом порядок расположения элементов не имеет никакого значения. Множество A всех элементов со свойством $P(x)$ обозначим через $A = \{x \mid P(x)\}$.

В большинстве случаев характеристическое свойство элементов данного множества, т. е. $P(x)$ формулируется словами. Например, множество корней уравнения $4x^2 + 6x - 8 = 0$ или область определения функции $y = \log_2(x^2 - 1)$. Может оказаться, что множество определено таким свойством, которым не обладает ни один объект. Например, множество рациональных чисел, квадрат которых равен 3; множество действительных чисел, которые являются корнями уравнения $x^2 + 2 = 0$.

Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется *пустым множеством* и обозначается через $\varnothing$.

Множество, которое содержит конечное число элементов, называется *конечным множеством*.

Множество, число элементов которого не является конечным, называется *бесконечным множеством.*

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что множество A является *подмножеством* множества B . И этот факт обозначают в виде $A \subset B$.

Два множества A и B называются равными, если каждый из них является подмножеством другого. Из этого определения следует, что равные множества состоят из одних и тех же элементов.

Если множество A равно множеству B, то пишут $A = B$.

В математике очень часто приходится иметь дело с числовыми множествами, т. е. с множествами, элементами которых являются числа. Для некоторых из них приняты стандартные обозначения: N — множество всех натуральных чисел; Z — множество всех целых чисел; Q — множество всех рациональных чисел; R — множество всех действительных чисел.

В дальнейшем, через $[a, b]$ будем обозначать промежуток (отрезок) на действительной прямой, определяемый неравенствами $a \le x \le b$. Другими словами, $[a, b]$ – множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \le x \le b$. Через $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) обозначим соответственно промежутки, определяемые неравенствами $a < x \le b$; $a \le x < b$; $a < x < b$. Эти промежутки геометрически могут быть изображены соответственно следующим образом:

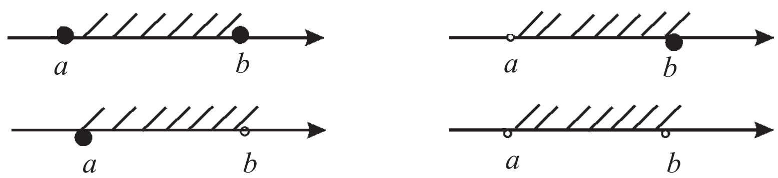


Рис. 1

Через $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ обозначим бесконечные промежутки на действительной прямой, которые задаются неравенствами: $x > a$, $x \ge a$, $x < b$, $x \le b$. Их геометрически можно изобразить следующим образом:

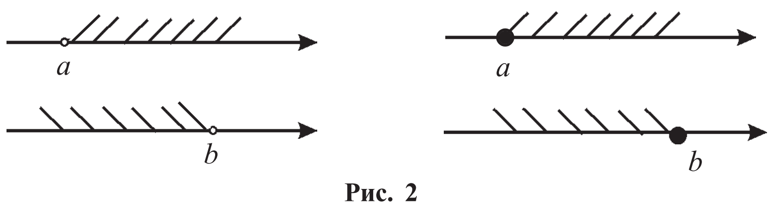


Рис. 2

Действительную прямую обозначим через $(-\infty, +\infty)$.

2. Операции над множествами. *Пересечением множеств* A и B называется множество, которое состоит из элементов, принадлежащих каждому из множеств A и B. Пересечение множеств A и B обозначается через $A \cap B$.

П р и м е р 1. Пусть $A = \{0, 1, 3, 6\}$, $B = \{3, 6, 7, 8\}$. Тогда $A \cap B = \{3, 6\}$.

П р и м е р 2. Пусть A — отрезок $[-3, 3]$, B — промежуток $(0, 6]$. Тогда $A \cap B = (0, 3]$ (рис.3).

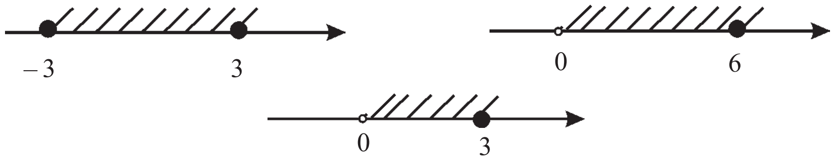


Рис. 3

Пусть даны множества A и B. Множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих множеству A или множеству B, называется *объединением этих множеств* и обозначается через $A \cup B$.

П р и м е р 3. Пусть $A = \{5, 6, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 12, 13\}$. Тогда $A \cup B = \{5, 6, 1, 2, 3, 12, 13\}$.

П р и м е р 4. Пусть A — отрезок $[3, 5]$, B — промежуток $(4, 6]$. Тогда $A \cup B$ является отрезком $[3, 6]$ (рис. 4).

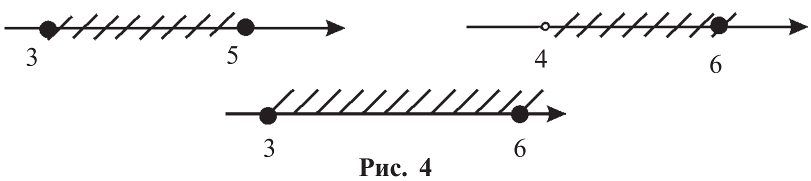


Рис. 4

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A, которые не являются элементами множества B. Разность множеств A и B обозначается как $A \setminus B$.

П р и м е р 5. Пусть $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $B = \{1, 2, \alpha, \beta\}$. Тогда элементы $\gamma, \delta \in A$ и $\gamma, \delta \notin B$. Следовательно, $A \setminus B = \{\gamma, \delta\}$.

В некоторых разделах математики приходится ограничиваться рассмотрением некоторого множества и всевозможных подмножеств этого множества. Например, в планиметрии мы изучаем плоские фигуры, которые являются подмножествами плоскости.

Если мы ограничиваемся рассмотрением всевозможных подмножеств некоторого множества E, то в этом случае множество E называют *универсальным множеством*.

Пусть множество E — универсальное множество и множество A — подмножество множества E. Тогда множество $E \setminus A$ называется *дополнением* множества A до множества E или просто дополнением множества A и обозначается через A' или $\overline{A}$ (или же через CA).

Свойства операций над множествами:

1°. $A \cup A = A$ — идемпотентность объединения;

2°. $A \cap A = A$ — идемпотентность пересечения;

3°. $A \cup B = B \cup A$ — коммутативность объединения;

4°. $A \cap B = B \cap A$ — коммутативность пересечения;

5°. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ — ассоциативность объединения;

6°. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ — ассоциативность пересечения;

7°. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ — дистрибутивность объединения относительно пересечения;

8°. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ — дистрибутивность пересечения относительно объединения;

$$\left.\begin{array}{l} 9^\circ.\ A \cup E = E \\ 10^\circ.\ A \cap E = A \end{array}\right\} \text{свойства универсального множества;}$$

$$\left.\begin{array}{l} 11^\circ.\ \overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B} \\ 12^\circ.\ \overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B} \end{array}\right\} \text{законы де Моргана.}$$

Доказательства этих свойств проводятся непосредственной проверкой. Для примера докажем свойство 8°, т. е. свойство $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Пусть x — любой элемент множества $A \cap (B \cup C)$. Тогда по определению операции пересечения множеств, $x \in A$ и $x \in (B \cup C)$. Теперь, применяя определение операции объединения множеств, имеем: $x \in A$ и $x \in B$ или $x \in C$. Отсюда $x \in A \cap B$ или $x \in A \cap C$, т. е. $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Следовательно,

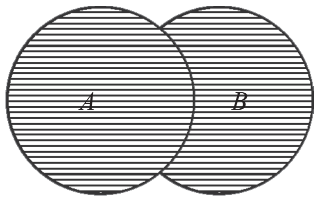
$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Аналогично доказывается, что если $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, то $x \in A \cap (B \cup C)$, т. е.

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C).$$

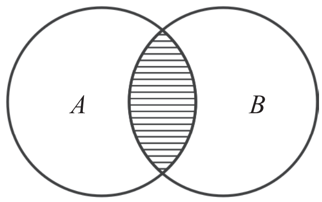
Таким образом, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

3. Диаграммы Эйлера–Венна. Для графического изображения множеств, операций над ними и их свойств используются диаграммы на плоскости (диаграммы Эйлера — Венна). При этом множество изображается некоторой сплошной фигурой, обычно кругом, а универсальное множество — прямоугольником. Пересечение кругов рассматривается как пересечение множеств, объединение кругов — как объединение множеств. Например:



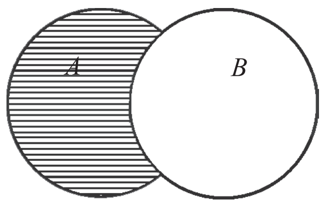
$A \cup B$

Рис. 5



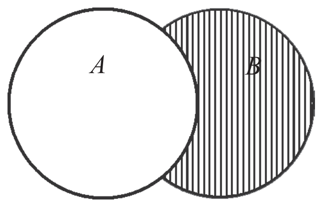
$A \cap B$

Рис. 6



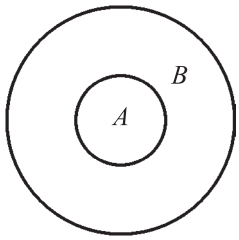
$A \setminus B$

Рис. 7



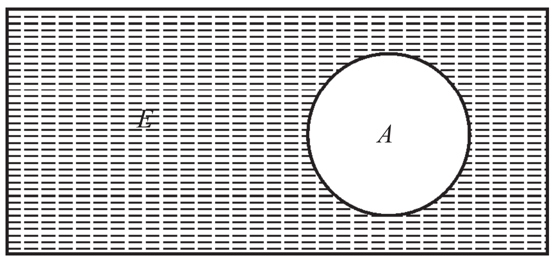
$B \setminus A$

Рис. 8



$A \subset B$

Рис. 9



$E \setminus A$

Рис. 10

На рисунках 5–8 изображены объединение, пересечение, разность двух множеств. Рисунок 9 означает, что множество A является подмножеством множества B. Универсальное множество E изображается множеством точек некоторого прямоугольника. Дополнение множества A изображено на рисунке 10 как заштрихованная часть прямоугольника.

Вопросы и задания

1. Какое множество называется пустым?
2. Какие множества называются равными?
3. Что называется пересечением, объединением, разностью двух множеств?
4. Перечислить свойства операций над множествами.
5. Построить диаграмму для множества $A \cap (B \cup C)$.

Упражнения

1. Изобразить на координатной плоскости множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют следующим условиям:

а) $|x+y| \le 1$; *б)* $|x+y| \ge 1$.

2. В группе туристов из 30 человек 20 человек знают английский язык, 8 человек — французский, 6 человек — оба языка. Сколько туристов не знают оба языка?

3* Записать в виде множества те значения x, при которых имеют смысл выражения:

а) $f(x)=\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}$; *г)* $f(x)=\log_x(x^2-1)$;

б) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{1-|x|}}$; *д)* $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+6}}{\log_3(10-x)}$.

в) $f(x)=\sqrt{3^x-5^x}$;

4. Привести примеры на: *а)* $A \cap B=\varnothing$; *б)* $A \cup B=N$; *в)* $A \cap B=B$.

5. Пусть $A=[2,4]$, $B=(0, 5]$, $C=[-3,2)$. Найти множества и изобразить их на координатной прямой:

а) $A \cup B$; *б)* $A \cap B$; *в)* $(A \cup B) \cap C$.

6. Множества A и B являются подмножествами универсального множества E. Составить диаграммы Эйлера–Венна для следующих множеств:

а) $A \cup \overline{B}$; *б)* $\overline{A} \cup \overline{B}$; *в)* $\overline{A \cap \overline{B}}$; *г)* $\left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)$.

7. Найти множество всех значений выражений:

а) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; *б)* $f(x)=\sin x+3\cos x$; *в)* $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

8. Доказать тождество: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

9*. Пусть A и B — конечные множества. Доказать, что $n\ (A \cup B) = n\ (A) + n\ (B) - n\ (A \cap B)$, где $n\ (M)$ — число элементов множества M.

---

10. Изобразить на координатной плоскости множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют следующим условиям:

а) $|\,x\,| + |\,y\,| = 1$; *б*) $x^2 - 2x + y \le 0$.

11*. Записать в виде множества те значения x, при которых имеют смысл выражения:

а) $f(x) = \dfrac{\log_{3x} 3}{\arccos(3x-1)}$; *в*) $f(x) = \log_{(x^2-1)} 8$.

б) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$;

12. Привести примеры на: *а*) $A \cup B = A$; *б*) $A \cap B = A \cup B$.

13. Пусть $A = [2\ ,4]$, $B = (0,\ 5]$, $C = [-3\ ,2)$. Найти множества и изобразить их на координатной прямой:

а) $A \cap C$; *б*) $B \cup C$; *в*) $A \cap B \cap C$.

14. Множества A и B являются подмножествами универсального множества E. Составить диаграммы Эйлера–Венна для следующих множеств:

а) $\overline{A \cup B}$; *б*) $\overline{A} \cap B$; *в*) $\overline{A \cap B}$.

15*. Найти множество значений следующих выражений:

а) $f(x) = \sqrt{2x - x^2 - 1}$;

б) $f(x) = a \sin \alpha + b \cos \alpha$;

в) $f(x) = \left(\sin x + \cos x\right)^2$.

16. Доказать следующее тождество: $B \cap (A \setminus B) = \varnothing$.

17*. Доказать, что число различных подмножеств множества, состоящего из n элементов, равно 2^n.

§ 2. Элементы теории математической логики

1. Высказывания и операции над ними. Под высказыванием понимают повествовательное предложение, о котором можно сказать точно, истинно оно или ложно. Легко понять, что следующие предложения являются высказываниями:

1. Ташкент — столица Республики Узбекистан.
2. Семь — простое число.
3. Число 6 больше, чем число 8.
4. $\sqrt{4} = 2$.
5. Число 11 — составное число.

Ясно, что предложения 1, 2, 4 — истинные, а предложения 3, 5 — ложные.

Высказывания могут быть образованы посредством слов или символов. Восклицательные и вопросительные предложения высказываниями не являются. Кроме того, повествовательные предложения, о которых нельзя говорить истинны они или ложны, также не являются высказываниями. Например, предложения:

1) Доброе утро, дорогие телезрители!
2) Сегодня какое число?
3) x — простое число,

высказываниями не являются.

Обычно высказывания обозначаются заглавными буквами латинского алфавита. Например, будем писать $A \rightleftarrows$ «$6 < 3$» , $B \rightleftarrows$«5 — простое число». Это значит, что A — высказывание, утверждающее, что 6 меньше чем 3. B — высказывание, гласящее, что 5 — простое число. Эти высказывания являются примерами простых высказываний. С помощью логических связок «или», «и», «если ... , то ...», «... тогда и только тогда, когда ...» , «не ...» из простых высказываний A и B можно образовывать другие сложные высказывания. Например:

1) $C \rightleftarrows$ «$6 < 3$ или 5 — простое число»;
2) $D \rightleftarrows$ «$6 < 3$ и 5 — простое число»;
3) $E \rightleftarrows$ «если $6 < 3$, то 5 — простое число»;
4) $F \rightleftarrows$ «$6 < 3$ тогда и только тогда, когда 5 — простое число»;
5) $K \rightleftarrows$ «5 — не простое число».

В математической логике истинность или ложность сложных высказываний устанавливается независимо от смыслового содержания простых высказываний, а логическим связкам дается точный смысл. Приступим к точному определению логических связок.

Пусть даны высказывания A и B. Тогда их *конъюнкцией* называется высказывание, которое является истинным, когда истинны оба высказывания A и B, и является ложным во всех остальных случаях.

Конъюнкция двух высказываний A , B обозначается через $A \wedge B$ или A & B и читается как «A и B». Значения логической операции «конъюнкция» можно выразить с помощью следующей таблицы, где «И» — означает «истинно», «Л» — означает «ложно»:

A	B	A ∧ B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

В дальнейшем, такие таблицы будем называть таблицами истинности. Если в таблице истинности значение «И» заменить на 1, а значение «Л» на 0, то таблица истинности примет вид:

A	B	A ∧ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Видно, что значение высказывания $A \wedge B$ соответствует произведению значений высказываний A и B. Поэтому $A \wedge B$ иногда называют *логическим умножением* (и обозначают через $A \cdot B$).

Дизъюнкцией высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое через $A \vee B$, которое ложно, когда оба высказывания A и B ложны и истинно во всех остальных случаях. Запись $A \vee B$ читается как «A или B».

В математической литературе дизъюнкцию высказываний A и B иногда обозначают через $A + B$ и называют *логическим сложением*.

Приведем таблицу истинности для логической операции «дизъюнкция»:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Отрицанием высказывания называется высказывание, которое истинно, когда само высказывание ложное и ложно, когда исходное высказывание истинно. Отрицание высказывания A обозначается через $\rceil A$ и читается как «не A».

Отрицание высказывания выражается в таблице истинности следующим образом:

A	$\rceil$A
И	Л
Л	И

Пусть даны высказывания A и B. *Импликацией* высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое через $A \Rightarrow B$, которое является ложным, когда A истинно, а B ложно и истинным во всех остальных случаях. Приведем таблицу истинности для $A \Rightarrow B$:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Таким образом, высказывание, утверждающее, что из лжи следует ложь или истина, является истинным высказыванием. Но высказывание, утверждающее, что из истины следует ложь, является ложным высказыванием.

$A \Rightarrow B$ читается как «если A, то B» или «из A следует B».

Пусть даны высказывания A и B. *Эквиваленцией* высказываний A и B называется высказывание, которое является истинным тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B истинны или когда оба высказывания A и B ложны. Эквиваленцию высказываний A и B обозначают как «$A \Leftrightarrow B$» и читают «A тогда и только тогда, когда B». Приведем таблицу истинности для $A \Leftrightarrow B$:

A	B	A ⇔ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

П р и м е р 1. Определить значение истинности следующих высказываний:

1) 7 — простое число и 9 — простое число;
2) 7 — простое число или 9 — простое число;
3) если $2 \cdot 2 > 4$, то 9 — простое число;
4) $2 \cdot 2 \leq 5$ тогда и только тогда, когда 9 — нечетное число.

Р е ш е н и е:

1) «7 — простое число» — истинное высказывание, «9 — простое число» — ложное высказывание. Поэтому в силу определения, конъюнкция этих высказываний является ложным высказыванием;

2) по определению дизъюнкции данное высказывание является истинным;

3) «$2 \cdot 2 > 4$» — ложное высказывание. Следовательно, по определению импликации, высказывание является истинным;

4) «$2 \cdot 2 \leq 5$» — истинное высказывание и «9 — нечетное число» — истинное высказывание. Тогда по определению эквиваленции, высказывание является истинным.

П р и м е р 2. Установить, какие пары следующих высказываний являются отрицанием друг друга:

1) $2 > 0$, $2 < 0$;
2) $6 < 10$, $6 \geq 10$.

Р е ш е н и е. 1) Отрицанием высказывания $2 > 0$ является высказывание $\urcorner(2 > 0)$. Это означает, что 2 не больше, чем 0, т. е. $2 \leq 0$. Поэтому $2 < 0$ не является отрицанием высказывания $2 > 0$.

2) $\urcorner(6 < 10)$ означает, что 6 не меньше, чем 10. Следовательно, $\urcorner(6 < 10)$ равносильно тому, что $6 \geq 10$. Обратно, $\urcorner(6 \geq 10)$ означает $6 < 10$. Поэтому данные высказывания являются отрицаниями друг друга.

С помощью логических операций над высказываниями из заданных высказываний можно строить различные сложные высказывания. При этом порядок выполнения операций указывается скобками. Например, с помощью высказываний A, B, C и с помощью логических операций можно построить следующие высказывания:

$$(A \wedge B) \Rightarrow \urcorner(C \vee B) \text{ или } A \Leftrightarrow \urcorner((B \wedge C) \vee A).$$

Такие сложные высказывания называются *формулами*.

Для упрощения записи формул можно ввести следующее соглашение. Логические операции выполняются в следующем порядке: сначала отрицание, потом конъюнкция, после этого дизъюнкция, затем импликация и, наконец, выполняется эквиваленция. Лишние скобки можно опустить согласно порядку выполнения операций. В связи с этим соглашением, последние формулы можно записать в виде:

$$A \wedge B \Rightarrow \urcorner(C \vee B) \text{ или } A \Leftrightarrow \urcorner(B \wedge C \vee A).$$

Высказывания, которые составляют формулу, будем называть элементарными формулами или *переменными высказываниями*. Они принимают значения 0 или 1.

Две формулы Б и В называются *равносильными*, если они принимают одинаковые значения истинности при любом наборе истинностных значений переменных высказываний. Равносильность записывается как «Б ≡ В».

Пример 3. $\urcorner\urcorner A \equiv A$, $A \vee A \equiv A$.

Для доказательства равносильности формул обычно используют таблицы истинности. Для вышеуказанных формул приведем таблицу истинности:

A	$\urcorner$A	$\urcorner\urcorner$A	A $\vee$ A
И	Л	И	И
Л	И	Л	Л

Формулы, которые при любом наборе истинностных значений переменных высказываний принимают значение «истинно» называются *тождественно истинными формулами* или *логическими законами* (*тавтологиями*).

П р и м е р 4. $A \vee \overline{A}$ — эта формула при любом значении переменного высказывания A принимает значение истинности «истинно». Действительно, если

$A = 1$, то $A \vee \overline{A} = 1 \vee 0 = 1$. Если же $A = 0$, то $A \vee \overline{A} = 0 \vee 1 = 1$.

Формула $A \vee \overline{A}$ называется *законом исключения третьего.*

Формулы, принимающие значение «ложь» при любом наборе истинностных значений переменных высказываний, называются *тождественно ложными* или *противоречиями*.

П р и м е р 5. $A \wedge \overline{A}$ — эта формула принимает значение «ложь» при любом значении истинности переменного высказывания A. Действительно, если $A = 1$, то $A \wedge \overline{A} = 1 \wedge 0 = 0$. Если же $A = 0$, то вновь получаем $A \wedge \overline{A} = 0 \wedge 1 = 0$.

2. Понятие предиката. Рассмотрим повествовательное предложение, которое зависит от переменных. Например, «x — простое число». Если вместо x подставить число 5, то получим высказывание «5 — простое число», которое истинно. Если же вместо x подставить число 4, то получим высказывание «4 — простое число», которое ложно.

Предложения, зависящие от переменной x и превращающиеся в высказывания при замене переменного на их конкретные значения, называются *предикатами* от одной переменной. Предикаты от одной переменной x обычно обозначаются через $P(x)$, $Q(x)$, $Q_1(x)$, ... , $Q_n(x)$ и т. д. Множество значений переменной x называется *областью определения предиката*.

П р и м е р 6. Пусть для любого x из N $P(x)$ означает «$x \geq 4$». Тогда $P(1) = 0$, $P(2) = 0$, $P(3) = 0$, $P(4) = 1$, $P(5) = 1$ и т. д. Если a натуральное число не меньшее, чем 4, то $P(a) = 1$.

П р и м е р 7. Пусть для любого x из N $Q(x)$ означает «x — четное число». Тогда $Q(1) = 0$, $Q(2) = 1$, $Q(3) = 0$, $Q(4) = 1$ и т. д. Для любого натурального числа k, $Q(2k) = 1$, $Q(2k - 1) = 0$.

3. Кванторы всеобщности и существования. Пусть $P(x)$ некоторый предикат, определенный на множестве M. Тогда через $\forall x\, P(x)$ записывают высказывание, которое истинно, если для всех a из M высказывание $P(a)$ истинно, (т. е. $P(a) = 1$). В противном случае, когда существует хотя бы один элемент x_0 из множества M такой, что $P(x_0) = 0$, $\forall x\, P(x)$ — ложное высказывание. $\forall x\, P(x)$ — читается как «любой x $P(x)$» или «для каждого x $P(x)$».

П р и м е р 8. Пусть для любого натурального числа x $P(x)$ — означает, что «x — нечетное число». Тогда $\forall x\, P(x)$ — является ложным высказыванием, так как существует такое натуральное число, например, $x = 2$, что $P(2) = 0$.

П р и м е р 9. Пусть $Q(x)$ — означает «для каждого натурального x, $2x$ — четное число». Тогда очевидно, что $\forall x\, Q(x) = 1$.

Через $\exists\, x\, F(x)$ — обозначают высказывание, которое является истинным, когда существует хотя бы один x_0 из области определения предиката $F(x)$, для которого $F(x_0)$ является истинным высказыванием. $\exists\, x\, F(x)$ является ложным в противном случае, т. е., когда для каждого элемента a из области определения предиката $F(x)$, $F(a) = 0$.

П р и м е р 10. Пусть для каждого натурального числа x $P(x)$ — означает «x делится без остатка на 3». Тогда $\exists\, x\, P(x) = 1$. Действительно, если $x = 3$, то $P(x) = 1$.

П р и м е р 11. Пусть предикат $P(x)$ означает «x — четное простое число, отличное от 2». Поскольку все простые числа, кроме 2, являются нечетными, то $\exists\, x\, P(x) = 0$.

Вопросы и задания

1. Что понимается под высказыванием?
2. Дать определение конъюнкции, дизъюнкции, отрицания, импликации и эквиваленции высказываний.
3. В каком порядке выполняются логические операции?
4. Какие формулы называются равносильными?
5. Что такое тавтология?
6. Что такое предикат?
7. Что означает квантор существования, квантор всеобщности?

Упражнения

1. Сформулировать отрицание следующих высказываний. Указать значения истинности данных высказываний и их отрицаний:
а) число 28 не делится на число 7; *б*) $4 \leq 5$.

2. Установить, какие из высказываний в следующих парах являются отрицаниями друг друга, а какие — нет (объяснить почему):
а) $4 < 0$ и $4 > 0$;
б) «Треугольник ABC — прямоугольный» и «Треугольник ABC — тупоугольный»;
в) «Функция f нечетна» и «Функция f четна»;
г) «Все простые числа нечетны» и «Существует простое четное число»;
д) «Существуют иррациональные числа» и «Все числа рациональные».

3. Следующие высказывания записать без знака отрицания:

а) $\rceil(a < b)$; *б*) $\rceil(a \leq b)$.

4. Сформулировать и записать в виде конъюнкции или дизъюнкции условие истинности каждого предложения (a и b — действительные числа):

а) $a \cdot b \neq 0$; *в*) $|a| = 3$; *д*) $\frac{a}{b} \neq 0$.
б) $a^2 + b^2 = 0$; *г*) $|a| > 3$;

5. Определить значения истинности следующих высказываний:
а) если 12 делится на 6, то 12 делится на 3;
б) если 11 делится на 6, то 11 делится на 3;
в) если 15 делится на 6, то 15 делится на 3;
г) если 15 делится на 3, то 15 делится на 6.

6. Доказать, что следующие формулы выполнимы:
а) $\rceil(P \Rightarrow \rceil P)$;
б) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$;
в) $(Q \Rightarrow (P \wedge R)) \wedge \rceil((P \vee R) \Rightarrow Q)$.

7. Составить таблицы истинности для следующих формул и указать, какие из формул являются выполнимыми, какие — тождественно истинными (тавтологиями) и какие — тождественно ложными (противоречиями):
а) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\rceil A \Leftrightarrow \rceil B)$;
б) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;
в) $A \wedge (B \wedge (\rceil A \vee \rceil B))$.

8. Составив таблицы истинности, доказать, что следующие формулы являются тавтологиями:
а) $\rceil(P \wedge \rceil P)$ (закон отрицания противоречия);
б) $\rceil\rceil P \Leftrightarrow P$ (закон двойного отрицания).

9. Составив таблицы истинности, доказать следующие равносильности:
а) $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$;
б) $A \Rightarrow B \equiv \rceil A \vee B$;
в) $\rceil(A \wedge B) \equiv \rceil A \vee \rceil B$;
г) $\rceil(A \vee B) \equiv \rceil A \wedge \rceil B$.

---

10. Сформулировать отрицание следующих высказываний и указать значения истинности данных высказываний и их отрицаний:
а) $6 > 3$; *б*) все простые числа нечетны.

11. Установить, какие из высказываний в следующих парах являются отрицаниями друг друга, а какие — нет (объяснить почему):

а) $6 < 9$ и $6 \geq 9$;

б) «Натуральное число n четно» и «Натуральное число n нечетно»;

в) «Все простые числа нечетны» и «Все простые числа четны»;

г) «Человеку известны все виды животных, обитающих на Земле» и «На земле существует вид животных, не известный человеку».

12. Записать без знака отрицания следующие высказывания:

а) $\rceil(a \geq b)$; *б*) $\rceil(a > b)$.

13. Сформулировать и записать в виде конъюнкции или дизъюнкции условие истинности каждого предложения (a и b — действительные числа):

а) $a \cdot b = 0$; *б*) $\dfrac{a}{b} = 0$; *в*) $|a| < 3$; *г*) $a^2 + b^2 \neq 0$.

14. Определить значения истинности следующих высказываний:

а) 12 делится на 6 тогда и только тогда, когда 12 делится на 3;

б) 11 делится на 6 тогда и только тогда, когда 11 делится на 3;

в) 15 делится на 6 тогда и только тогда, когда 15 делится на 3;

г) 15 делится на 5 тогда и только тогда, когда 15 делится на 4.

15. Доказать, что следующие формулы выполнимы:

а) $\rceil((P \Leftrightarrow \rceil Q) \vee R) \wedge Q$; *б*) $(P \wedge Q) \Rightarrow ((R \vee Q) \Rightarrow (Q \wedge \rceil Q))$.

16. Составить таблицы истинности для следующих формул и указать, какие из формул являются выполнимыми, какие — тождественно истинными (тавтологиями) и какие — тождественно ложными (противоречиями):

а) $\rceil(\rceil A \vee \rceil B) \Rightarrow \rceil(A \wedge B))$;

б) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B$;

в) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow B$.

17. Составив таблицы истинности, доказать, что следующие формулы являются тавтологиями:

а) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\rceil Q \Rightarrow \rceil P)$ (закон контрапозиции);

б) $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\rceil P \Leftrightarrow \rceil Q)$ (закон противоположности).

18. Составив таблицы истинности, доказать следующие равносильности:

а) $A \wedge B \equiv \rceil(\rceil A \vee \rceil B)$; *в*) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;

б) $A \vee B \equiv \rceil(\rceil A \wedge \rceil B)$; *г*) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Для множеств $A, B \subset M = \{1, \dots, 20\}$ найти множества вида $A \setminus B, B \setminus A, A \cup B, A \cap B, A', B'$, если:

а) $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{11, 13, 15\}$;
б) $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{12, 14, 16\}$;
в) $A = \{7, 9, 11\}$, $B = \{17, 19\}$.

2. Доказать:

а) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
б) $A \setminus (B \setminus C) \subset A \cup C$;
в) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$;
г) $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.

3*. Найти множество всех значений x, при которых имеют смысл выражения:

а) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x - 3}}$;
б) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 5x + 6}}$;
в) $y = \sqrt{\lg_{\frac{1}{3}} \dfrac{x-1}{x+5}}$;
г) $y = \log_{\frac{1}{3}} \log_3 \dfrac{x+1}{x-1}$.

4*. Решить следующие неравенства:

а) $\log_2 \dfrac{3x-4}{x+1} < 1$;
б) $\sqrt{3x - x^2} > 4 - x$;
в) $\sqrt{x^2 - 5x} > 1$;
г) $\sqrt{x^2 - 3x} < \sqrt{2}$.

5. Доказать истинность следующих высказываний:

а) $(A \Rightarrow \rceil B) \Rightarrow (B \Rightarrow \rceil A)$;
б) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \wedge C)$;
в) $A \wedge (A \Leftrightarrow B) \Rightarrow B$;
г) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.

6. Доказать следующие утверждения:

а) если $A \Rightarrow B = 1$, то $(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) = 1$.
б) если $A \Leftrightarrow B = 1$, то $A \equiv B$.
в) если $\rceil A = 1$, то $A \Rightarrow B = 1$.
г) для любой логической формулы существует эквивалентная ей формула, построенная только с помощью логических операций $\rceil, \wedge, \vee$.

7. Построить предикаты $A(x)$ и $B(x)$ такие, что:
а) $A(x) \vee B(x)$ является тождественно истинным предикатом;
б) $A(x) \wedge B(x)$ является тождественно ложным предикатом.

ГЛАВА II

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Натуральные числа

1. Простые и составные числа. Еще в глубокой древности числа использовались для счета предметов и для измерения величин. Числа, используемые для счета предметов, называются *натуральными числами*. Таким образом, 1, 2, 3, . . . — натуральные числа.

Множество $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ называется *множеством натуральных чисел*.

Пусть $a, b \in N$. Если существует $q \in N$ такое, что выполняется равенство $a = b \cdot q$, то говорят, что a делится на b, и пишут $a \,\vdots\, b$. При этом число b называется делителем числа a. Если число a не делится на число b, то это записывается в виде $a \not\vdots\; b$.

П р и м е р 1. $1 \,\vdots\, 1$ (единица имеет только один натуральный делитель); $2 \,\vdots\, 1$, $2 \,\vdots\, 2$ (число 2 имеет только два натуральных делителя). Число 4 имеет три натуральных делителя: 1, 2 и 4.

Натуральное число, которое имеет только два различных натуральных делителя, называется *простым числом*. Из этого определения следует, что простое число — это натуральное число, отличное от единицы, которое делится только на единицу и на себя.

П р и м е р 2. Числа 2, 3, 5, 7 являются простыми числами.

Натуральные числа, имеющие не менее трех различных натуральных делителей, называются *составными числами*. Из этих определений следует, что 1 не является простым и не является составным числом. Если число a составное , то $a \,\vdots\, 1$, $a \,\vdots\, a$ и a имеет, по крайней мере, еще один натуральный делитель, отличный от 1 и от a.

П р и м е р 3 . Составными числами являются, например, числа 4, 6, 8, 9, 10.

Таким образом, любое натуральное число a есть либо единица, либо простое число, либо составное число.

Т е о р е м а 1. Пусть a — натуральное число, отличное от единицы и p — наименьший его делитель, причем $p > 1$. Тогда p — простое число.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $a \neq 1$. Предположим, что p — не простое число. Тогда p составное число. Следовательно, p имеет делитель p_1 с условиями $p_1 \neq 1$, $p_1 \neq p$. Поэтому $a \,\vdots\, p$ и $p \,\vdots\, p_1$.

Тогда $a \,\vdots\, p_1$ и $1 < p_1 < p$. Это противоречит тому, что p является наименьшим делителем числа a.

Т е о р е м а 2. Любое составное число a, имеет хотя бы один простой делитель p, удовлетворяющий условию $p < \sqrt{a}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Поскольку a составное число, то существуют простое число p (наименьший делитель) и число q такие, что $a = p \cdot q$ и $p \neq 1$, $q \neq 1$. Имеем $p < q$. Тогда $p^2 < pq = a$. Отсюда $p < \sqrt{a}$.

2. Бесконечность множества простых чисел.

Т е о р е м а 3 (*теорема Евклида*). Множество простых чисел является бесконечным множеством.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Предположим обратное. Пусть множество простых чисел — конечное множество, т. е. $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ — множество всех простых чисел.

Рассмотрим число $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$. Число $a \neq 1$, $a \notin P$ и a не делится ни на один из простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Так как a не имеет простых делителей, то в силу теоремы 2, a — простое число. Это противоречит условию $a \notin P$. Следовательно, множество простых чисел не может быть конечным множеством и поэтому является бесконечным.

Вопросы и задания

1. Дать определение простого числа.
2. Какие числа называются составными?
3. Сформулировать основные теоремы о простых и составных числах.

Упражнения

1. Пусть m — составное число и p — его наименьший делитель, больший единицы. Доказать, что p — простое число.
2. Доказать бесконечность множества простых чисел.
3. Написать последовательность всех простых чисел до 110.
4. Доказать, что 103 является простым числом.

---

5. Является ли 743 простым числом?
6. Доказать, что если произведение двух натуральных чисел делится на простое число p, то хотя бы один из сомножителей делится на p.
7. Определить, какие из следующих чисел являются простыми, а какие из них — составные: 397, 401, 403, 409, 677, 679, 701.

§ 2. Метод математической индукции

1. Принцип математической индукции. Метод рассуждений, ведущий от частных заключений к некоторому общему выводу, называется *индукцией.*

Рассмотрим задачу: найти сумму внутренних углов выпуклого n-угольника.

Пусть S_n — сумма внутренних углов n-угольника. Тогда $S_3 = 180°$, $S_4 = 360° = 180°(4-2)$, $S_5 = 540° = 180°(5-2)$ и т. д.

Из этих частных заключений можно сделать общий вывод, что $S_n = 180°(n-2)$.

Рассмотрим другой пример. Пусть дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + x + 41$. Тогда $f(1) = 43$, $f(2) = 47$, $f(3) = 53$.

Полученные числа — простые. Отсюда можно сделать неверное заключение, что $f(n)$ — простое число для любого натурального n. Действительно, если $n = 41$, то $f(41) = 41^2 + 41 + 41 = 41 \cdot 43$ — составное число. Из этих двух примеров видно, что один и тот же метод рассуждения в первом случае приводит к правильному выводу, а во втором случае приводит к неверному заключению. Следовательно, такой метод рассуждения не является доказательством. Но этот метод в большинстве случаев помогает сформулировать гипотезу, которую затем можно доказать другими способами. Посредством такого метода сделанный вывод получается из нескольких частных заключений и не охватывает все случаи. Поэтому этот метод называют *неполной индукцией*.

Метод рассуждения, который охватывает все возможные случаи, называется *полной индукцией*.

Рассмотрим утверждение: сумма первых k нечетных натуральных чисел равна k^2. Действительно, если $k=1$, то $1 = 1^2$; $k=2$, то $1 + 3 = 2^2$; $k = 3$, то $1 + 3 + 5 = 3^2$; ... .

Положим, что утверждение проверено для $k=50$. Используя этот факт, зададимся вопросом: можно ли проверить справедливость нашего утверждения для $k = 51$? Оказывается, что можно. Действительно, при $k=50$ по предположению имеем: $1 + 3 + \ldots + (2 \cdot 49 + 1) = 50^2$.

Пусть $k = 51$. Тогда $1 + 3 + \ldots + (2 \cdot 49 + 1) + (2 \cdot 50 + 1) = 50^2 + 2 \cdot 50 + 1 = (50 + 1)^2 = 51^2$. Таким способом мы можем доказать верность утверждения для $k = 51, 52, \ldots$ и т. д., то есть для всех натуральных чисел.

В основе такого метода доказательства лежит следующий принцип, называемый *принципом математической индукции*:

Утверждение $P(n)$, зависящее от натурального числа n, верно для любого n, если выполнены следующие два условия:

1) Утверждение верно для $n = 1$.

2) Из того, что утверждение верно для $n = k$ следует его истинность при $n = k + 1$.

Принцип математической индукции является аксиомой аксиоматической теории натуральных чисел. На основе этой аксиомы строится *метод математической индукции*. Доказательство с помощью метода математической индукции состоит из трех этапов:

1-й этап (базис индукции). Проверяется истинность утверждения для $n = 1$.

2-й этап (предположение индукции). Предполагается, что утверждение верно для $n = k \geq 1$.

3-й этап (заключительный). Из того, что утверждение верно для $n = k$, выводится истинность утверждения для $n = k + 1$.

Некоторые утверждения, зависящие от натурального переменного n, могут иметь смысл, начиная с некоторого натурального числа p и могут быть истинны для всех натуральных чисел, начиная с p. Такие утверждения также могут быть доказаны методом математической индукции. В таких случаях метод математической индукции также состоит из трех этапов:

1-й этап (базис индукции). Проверяется истинность утверждения для некоторого натурального числа p.

2-й этап (предположение индукции). Предполагается, что рассматриваемое утверждение верно для $n = k$, $k \geq p$.

3-й этап (заключительный). Из того, что утверждение верно для $n = k$, доказывается истинность утверждения для $n = k + 1$.

П р и м е р 1. Доказать, что сумма внутренних углов выпуклого n-угольника вычисляется по формуле $S_n = 180°(n - 2)$.

1-й этап (базис индукции). Утверждение имеет смысл, начиная с $n = 3$. $S_3 = 180°(3 - 2)$. $S_3 = 180°$. Действительно, сумма внутренних углов треугольника равна $180°$.

2-й этап (предположение индукции). Предположим, что утверждение верно для $n = k$, т. е. $S_k = 180°(k - 2)$.

3-й этап (заключительный). Докажем, что $S_{k+1} = 180°((k + 1) - 2)$.

Пусть $A_1A_2 \ldots A_kA_{k+1}$ — произвольный выпуклый $(k + 1)$-угольник (рис. 11). Соединяя A_1 с A_k получим, что

$$S_{k+1} = S_k + 180° = 180°(k - 2) + 180° = 180°((k + 1) - 2).$$

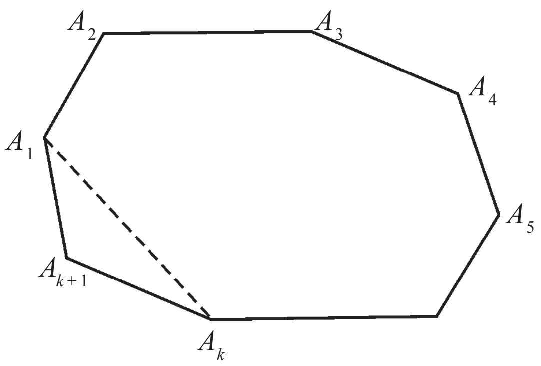


Рис. 11

П р и м е р 2. Доказать, что для любого натурального n верно равенство: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. При $n=1$ утверждение верно. Действительно, $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2+1)}{6}$ или $1=1$.

2. Пусть $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

3. Докажем, что

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}.$$

В силу предположения индукции

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k\ (k+1)\ (2k+1)}{6} + (k+1)^2.$$

Тогда $\dfrac{k\ (k+1)\ \ (2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$

$$= (k+1)\left(\frac{k\ (2k+1)}{6} + k + 1\right) = (k+1)\ \frac{2k^2 + k + 6k + 6}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)\ (2k^2 + 7k + 6)}{6}.$$

Разлагая $2k^2 + 7k + 6$ на множители, получим:

$$2k^2 + 7k + 6 = (k+2)\ (2k+3).$$

Таким образом, $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \dfrac{(k+1)((k+1)+1)(2k+3)}{6}$

или $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \dfrac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$.

В доказательстве некоторых утверждений удобно пользоваться следующей формой метода доказательства с помощью математической индукции:

1-й этап. Утверждение доказывается для $n = 1$ (или для $n = k$).

2-й этап. Предполагается, что утверждение верно для всех натуральных чисел, меньших n.

3-й этап. Доказывается истинность утверждения для n.

В следующем пункте мы применим такую форму доказательства с помощью метода математической индукции.

2. Основная теорема арифметики.

Теорема. Всякое натуральное число — это либо единица, либо простое число, либо такое число, которое с точностью до порядка сомножителей представляется единственным образом в виде произведения простых чисел.

Доказательство. Применим метод математической индукции. Пусть a некоторое натуральное число. Если $a = 1$, то утверждение теоремы выполняется. Предположим, что для всех натуральных чисел b, $b < a$ теорема верна, т. е. либо $b = 1$, либо b — простое число, либо b — разлагается на произведение простых чисел единственным образом до порядка сомножителей.

Докажем теорему для натурального числа a в предположении, что для всех натуральных чисел меньших чем a, теорема верна. Если a — простое число, то теорема верна. Поэтому положим, что a — составное число. Тогда по теореме 1 из параграфа 1, наименьший делитель p_1 числа a является простым числом. Следовательно, $a = p_1 \cdot b$, где b — некоторое натуральное число, меньшее чем a. По предположению индукции для числа b теорема верна, т. е. $b = p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k$. Отсюда $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$.

Таким образом, любое натуральное число a разложимо в произведение простых чисел.

Докажем единственность такого разложения до порядка сомножителей. Пусть $a = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$ другое разложение числа a на произведение простых чисел. Тогда

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m. \tag{1}$$

Обе части равенства делятся на p_1, в частности, $q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$ делится на p_1. Так как $q_1, q_2, \ldots, q_m$ — простые числа, то существует такой q_i, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, что $q_i = p_1$. Для определенности положим, что $q_1 = p_1$. Тогда

$$b = p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = q_2 \cdot \ldots \cdot q_m. \tag{2}$$

Так как $b < a$, то по предположению индукции разложение (2), а следовательно, и разложение (1) единственны с точностью до порядка сомножителей.

В том случае, когда в разложении натурального числа a на произведение простых чисел участвуют только m различных простых чисел, причем p_1 участвует α_1 раз, p_2 — α_2 раза и т. д., p_m — α_m раз, имеем:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}.$$

Такое разложение называется *каноническим разложением натурального числа*.

П р и м е р 3. $108 = 2^2 \cdot 3^3$ — каноническое разложение натурального числа 108.

3. Применение метода математической индукции к вопросам делимости чисел. Рассмотрим несколько примеров на применение метода математической индукции к вопросам делимости чисел.

П р и м е р 4. Числа вида $n^3 + 11n$ делятся на 6 при любом натуральном n.

Р е ш е н и е. Докажем это утверждение, обозначив $n^3 + 11n$ через $S(n)$.

1. Базис индукции. $S(1) = 12$ — делится на 6.
2. Предположение индукции. Пусть $S(k) = k^3 + 11k$ делится на 6.
3. Докажем, что $S(k+1)$ делится на 6.

Действительно,

$$S(k+1) = (k+1)^3 + 11(k+1) = (k+1)(k^2 + 2k + 1 + 11) =$$
$$= (k+1)(k^2 + 2k + 12) = (k+1)(k^2 + 2k) + 12(k+1) =$$
$$= k^3 + 2k^2 + k^2 + 2k + 12(k+1) = k^3 + 11k + 3k^2 - 9k + 12(k+1) =$$
$$= (k^3 + 11k) + 3k(k-3) + 12(k+1).$$

Первое слагаемое суммы делится на 6 по предположению индукции. Третье слагаемое тоже делится на 6. Второе слагаемое делится на 3. Но $k(k-3)$ делится на 2, так как либо k, либо $(k-3)$ четно. Поэтому и второе слагаемое суммы делится на 6. Следовательно, $S(k+1)$ делится на 6.

П р и м е р 5. Доказать, что при любом натуральном n число $10^n + 18n - 28$ делится на 27.

Р е ш е н и е. Выражение $10^n + 18n - 28$ обозначим через $P(n)$.

1. $P(1) = 10 + 18 - 28 = 0$. Ясно, что 0 делится на 27.
2. Пусть $P(k) \vdots 27$, т. е. $(10^k + 18k - 28) \vdots 27$.
3. Докажем, что $P(k+1) \vdots 27$.

$$P(k+1) = 10^{k+1} + 18(k+1) - 28 = 10 \cdot 10^k + 18k + 18 - 28 =$$
$$= 10 \cdot 10^k + 18k - 10 = 10 \cdot (10^k + 18k - 28 - 18k + 28) + 18k - 10 =$$
$$= 10 \cdot (10^k + 18k - 28) - 180k + 280 + 18k - 10 = 10 \cdot (10^k + 18k - 28) -$$
$$- 162k + 270 = 10 \cdot (10^k + 18k - 28) - 27 \cdot (6k - 10).$$

По предположению индукции, первое слагаемое делится на 27. Так как второе слагаемое тоже делится на 27, то $P(k+1) \vdots 27$.

Вопросы и задания

1. Какой метод рассуждений называется индукцией ?
2. Сформулировать принцип математической индукции.
3. В чем разница между полной и неполной индукциями?
4. Объяснить этапы доказательства методом индукции.
5. Сформулировать основную теорему арифметики.
6. Рассказать о применении метода математической индукции.

Упражнения

1. Доказать методом математической индукции следующие равенства:

а) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

б) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n \cdot (3n+1) = n(n+1)^2$;

в) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$;

г) $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{n}{3n+1}$.

2. Доказать методом математической индукции следующие неравенства:

а) Если $\alpha > -1$, то для любого натурального n верно, что $(1+\alpha)^n \geq 1 + n \cdot \alpha$ (неравенство Бернулли);

б) Для любого натурального n, $3^n > n$.

3. Доказать для любого натурального n:

а) $(3^{2n+3} - 24 \cdot n + 37) \vdots 64$; *б*) $(5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1) \vdots 8$.

4. Доказать, что сумма $2k + 1$ последовательных натуральных чисел делится на $2k + 1$, где k — натуральное число.

5. Доказать методом математической индукции следующие равенства:

а) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$;

б) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+...+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$;

в) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

г) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$.

6. Доказать методом математической индукции следующие неравенства:

а) для любого натурального n, $2^n > n$;

б) для любого натурального $n > 1$, $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$.

7. Доказать для любого натурального n:

а) $(n^5 - n) \vdots 5$; *б*) $n(n^2 + 5) \vdots 6$; *в*) $n(n + 1)(2n + 1) \vdots 6$.

§ 3. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное натуральных чисел

1. Натуральный делитель натурального числа. Пусть a, b некоторые натуральные числа. Если существует натуральное число c такое, что выполняется равенство $a = b \cdot c$, то говорят, что a делится на b или b является делителем числа a. Напомним, что $a \vdots b$ означает делимость числа a на число b без остатка.

Теорема 1. Пусть $a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot...\cdot p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_i\neq 0, i=1,...,k$ — каноническое разложение числа a. Тогда любой натуральный делитель числа a имеет вид $p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot...\cdot p_k^{\beta_k}$, где $0\le\beta_i\le\alpha_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Доказательство. Пусть $a = b \cdot c$, т. е. b — делитель числа a и $p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot...\cdot p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа a. Если $b = 1$, то $b=p_1^{0}\cdot p_2^{0}\cdot...\cdot p_k^{0}$ и утверждение теоремы верно. Пусть $b > 1$. Имеем $p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot...\cdot p_k^{\alpha_k} = b\cdot c$. Пусть p — простой делитель числа b. Тогда, поскольку $a \vdots b$ и $b \vdots p$, то $a \vdots p$. Следовательно, p является простым делителем числа a. Поэтому каждый простой делитель p числа b является одним из простых чисел $p_1, p_2, ... , p_k$.

Значит, b можно записать в виде: $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot p_k^{\beta_k}$, где $0 \le \beta_1 \le \alpha_1, ..., 0 \le \beta_k \le \alpha_k$.

2. Число натуральных делителей натурального числа.

Т е о р е м а 2. Если $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение натурального числа a, то число всех натуральных делителей числа a вычисляется по формуле:

$$\tau(a) = (\alpha_1 + 1) \cdot ... \cdot (\alpha_к + 1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Поскольку любой натуральный делитель d числа a имеет вид:

$$d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot p_k^{\beta_k}, \tag{1}$$

где $0 \le \beta_1 \le \alpha_1, ..., 0 \le \beta_k \le \alpha_k$, то число всех делителей числа a равно числу всех упорядоченных наборов $\beta_1, \beta_2, ... , \beta_k$, удовлетворяющих условиям формулы (1).

В силу условий формулы (1), каждое β_i принимает $\alpha_i + 1$ значений, а именно: $\beta_i = 0, 1, ... , \alpha_i$. Кроме того, выбор различных значений $\beta_1, \beta_2, ... , \beta_k$ не зависит один от другого. Следовательно, число всех упорядоченных наборов $\beta_1, \beta_2, ... , \beta_k$ равно $(\alpha_1 + 1) \cdot ... \cdot (\alpha_k + 1)$.

Сумма натуральных делителей натурального числа n вычисляется по формуле:

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot ... \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

П р и м е р 1. Вычислить число и сумму делителей числа 12.

Находим каноническое разложение числа 12: $12 = 2^2 \cdot 3$. Тогда

$$\tau(12) = (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 6, \qquad \sigma(12) = \frac{2^3 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^2 - 1}{3 - 1} = 28.$$

3. Наибольший общий делитель натуральных чисел. Натуральное число m называется *общим делителем* натуральных чисел $a_1, a_2, ... , a_k$, если m является делителем каждого из них. Наибольший среди всех общих делителей натуральных чисел $a_1, a_2, ... , a_k$ называется *наибольшим общим делителем* и обозначается через НОД $(a_1, a_2, ... , a_k)$. Если НОД $(a_1, a_2, ... , a_k) = 1$, то числа $a_1, a_2, ... , a_k$ называются *взаимно простыми числами*.

Т е о р е м а 3. Наибольший общий делитель d натуральных чисел $a_1, a_2, ... , a_k$ делится на любой их общий делитель и обратно, если некоторый общий делитель натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$ делится на любой их общий делитель, то он является наибольшим делителем.

Доказательство. Пусть d = НОД $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, d_1 — любой общий делитель чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$ и $d_1 = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_m^{\alpha_m}$ — каноническое разложение числа d_1 на простые множители. Ясно, что $d \vdots p_i$, $i = 1, \dots, m$ (в противном случае $d \cdot p_i$ является общим делителем, большим чем d). Предположим, что для некоторого t, $1 \le t < б_i$ число $d \vdots p_i^t$, но $d \not\vdots\, p_i^{t+1}$. Тогда числа $\frac{d}{p_i^t}$ и $p_i^{б_i}$ взаимно простые, а число $\frac{d}{p_i^t} \cdot p_i^{б_i} = d \cdot p_i^{б_i - t}$ является общим делителем, большим чем d, что невозможно. Из этих рассуждений следует, что $d \vdots p_i^{б_i}$ для всех $i = 1, \dots, m$.

Следовательно, $d \vdots p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_m^{\alpha_m}$ или $d \vdots d_1$. Обратное утверждение очевидно.

Теорема 4. Пусть $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$ — канонические разложения натуральных чисел a и b. Тогда наибольший общий делитель d этих чисел вычисляется по формуле:

$$d = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \dots \cdot p_k^{\min\{\alpha_k, \beta_k\}}.$$

Доказательство. Пусть $m = p_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\delta_k}$ — любой общий делитель чисел a и b. Тогда $\delta_1 \le \alpha_1$ и $\delta_1 \le \beta_1, \dots, \delta_k \le \alpha_k$ и $\delta_k \le \beta_k$. Следовательно, $\delta_1 \le \min\{\alpha_1, \beta_1\}, \dots, \delta_k \le \min\{\alpha_k, \beta_k\}$.

Так как число $p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \dots \cdot p_k^{\min\{\alpha_k, \beta_k\}}$ делится на m, то согласно теореме 3 имеем равенство: $d = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \dots \cdot p_k^{\min\{\alpha_k, \beta_k\}}$.

Пример 2. Найти НОД (396, 504).

Решение. $396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$, $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ или
$396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^1 \cdot 7^0$, $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^1 \cdot 11^0$. Отсюда НОД (396, 504) = $= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^0 \cdot 11^0 = 36$.

4. Наименьшее общее кратное. Если числа a и b не имеют общих делителей, кроме единицы, т. е. НОД $(a, b) = 1$, то они являются взаимно простыми числами. Например, числа 7 и 9, 2 и 5 являются взаимно простыми числами. Рассмотрим свойства взаимно простых чисел.

1^0. Любые различные простые числа являются взаимно простыми числами.

2^0. Пусть p_1, p_2 — различные простые числа. Тогда их натуральные степени $p_1^{\alpha_1}$ и $p_2^{\alpha_2}$ являются взаимно простыми числами.

3^0. Натуральные числа a и b — взаимно простые тогда и только тогда, когда они не имеют общего простого делителя.

4^0. Пусть p — некоторое простое число, a — любое натуральное число. Тогда либо a делится на p, либо a и p взаимно простые числа.

Для примера докажем свойство 3^0. Если числа a и b взаимно простые, то их наибольший общий делитель 1. Поэтому они не имеют простого общего делителя. Обратно, если числа a и b не имеют простого общего делителя, то их наибольший общий делитель равен 1. Действительно, в противном случае, если НОД $(a, b) \neq 1$, то наибольший общий делитель имеет простой делитель, являющийся общим делителем чисел a и b. Следовательно, НОД $(a, b) = 1$ и числа a и b взаимно простые.

Доказательство остальных свойств оставляем в качестве самостоятельных упражнений.

Теорема 5. Пусть произведение двух натуральных чисел делится на простое число p. Тогда хотя бы один из сомножителей делится на p.

Доказательство. Пусть $(a \cdot b) \vdots p$, т. е. $a \cdot b = p \cdot c$, где c — частное от деления $a \cdot b$ на p. Тогда число p участвует в каноническом разложении хотя бы одного из чисел a или b, т. е. $a \vdots p$ или $b \vdots p$.

Следствие 1. Если $(a \cdot b) \vdots p$, a и p взаимно простые числа, то $b \vdots p$.

Следствие 2. Если произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots , a_n$ делится на простое число p, то хотя бы один из сомножителей делится на p.

Теорема 6. Пусть произведение $a \cdot b$ двух натуральных чисел a и b делится на степень p^α, где p — простое число, являющееся взаимно простым с одним из сомножителей. Тогда другой из сомножителей делится на степень p^α.

Доказательство. Пусть $(a \cdot b) \vdots p^\alpha$. Тогда $a \cdot b = p^\alpha \cdot c$. Для определенности положим, что НОД$(a, p) = 1$. Тогда p^α — участвует в каноническом разложении числа b, следовательно $b \vdots p^\alpha$.

Теорема 7. Если $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ и $q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot q_m^{\beta_m}$ — канонические разложения взаимно простых чисел a и b, то каноническим разложением числа $a \cdot b$ будет $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \times$ $\times q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot q_m^{\beta_m}$.

Доказательство. Действительно, $a \cdot b = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \times$ $\times q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot q_m^{\beta_m}$. Кроме того, поскольку НОД $(a, b) = 1$, то, $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k}, q_1^{\beta_1}, q_2^{\beta_2}, \ldots, q_m^{\beta_m}$ — различные, взаимно простые числа. Отсюда следует, что $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \cdot q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \ldots\ q_m^{\beta_m}$ — каноническое разложение числа $a \cdot b$.

Теорема 8. Пусть натуральное число a делится на степени $p_1^{\alpha_1}$ и $p_2^{\alpha_2}$, где p_1 и p_2 — различные простые числа. Тогда число a делится на $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $a \vdots p_1^{\alpha_1}$. Следовательно, существует число q такое, что $a = p_1^{\alpha_1} \cdot q$. Но $a \vdots p_2^{\alpha_2}$ или $(p_1^{\alpha_1} \cdot q) \vdots p_2^{\alpha_2}$. Применяя теорему 6, получаем, что $q \vdots p_2^{\alpha_2}$. Поэтому существует натуральное число d такое, что $q = p_2^{\alpha_2} \cdot d$ или $a = p_1^{\alpha_1} \cdot q = p_1^{\alpha_1} \cdot (p_2^{\alpha_2} \cdot d) = (p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}) \cdot d$. Это означает, что $a \vdots (p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2})$.

Теорема 9. Если натуральное число a делится на натуральные степени $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные простые числа, то число a делится на произведение $p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$.

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции по числу k, т. е. по числу простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$. В случае, когда $k = 2$ теорема доказана выше (см. теорему 8).

Предположим, что теорема верна для $k = n$. Значит, если $a \vdots p_1^{\alpha_1}, \ldots, a \vdots p_n^{\alpha_n}$, то $a \vdots (p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n})$. Докажем теорему для случая $k = n + 1$. По условию теоремы $a \vdots p_1^{\alpha_1}, \ldots, a \vdots p_n^{\alpha_n}$, $a \vdots p_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$. По предположению индукции $a \vdots (p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n})$. Тогда существует такое натуральное число q, что $a = (p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}) \cdot q$.

Но $a \vdots p_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$ или $(p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}) \cdot q \vdots p_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$. Тогда в силу теоремы 6, существует такое натуральное число q_1, что $q = p_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \cdot q_1$. Откуда $a = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n} \cdot p_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \cdot q_1$. Таким образом, $a \vdots \left(p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n} p_{n+1}^{\alpha_{n+1}}\right)$. Это завершает доказательство нашей теоремы.

Если натуральное число c делится на каждое из натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, то оно называется *общим кратным* этих натуральных чисел. Наименьшее из всех общих кратных чисел a_1, $a_2, \ldots, a_k$ называется их *наименьшим общим кратным*.

Наименьшее общее кратное чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, обозначается через НОК($a_1, a_2, \ldots, a_k$). В частности, через НОК(a, b) обозначим наименьшее общее кратное чисел a и b.

Т е о р е м а 10. Пусть $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$. Тогда наименьшее общее кратное чисел a и b вычисляется по формуле:

$$\text{НОК}\,(a, b) = p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k\}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть m — наименьшее общее кратное чисел a и b. Тогда, поскольку $m \vdots a$ и $m \vdots b$, то $m \vdots p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}}, \ldots,$ $m \vdots p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k\}}$. Так как $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые числа, то $m \vdots (p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k\}})$.

Но с другой стороны, число $p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k\}}$ — делится на числа a и b. Поэтому $p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k\}} \geq m$. Отсюда следует, что $p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k\}} = m$.

С л е д с т в и е . Любое общее кратное чисел a и b делится на наименьшее общее кратное этих чисел.

П р и м е р 3. Найти НОК (198, 252).

Р е ш е н и е . Каноническое разложение чисел 198 и 252 можно получить с помощью следующей таблицы:

$$\begin{array}{r|l}
198 & 2 \\
99 & 3 \\
33 & 3 \\
11 & 11 \\
1 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
252 & 2 \\
126 & 2 \\
63 & 3 \\
21 & 3 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}$$

Следовательно, $198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$, $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Отсюда НОК $(198, 252) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 = 2772$.

5. Т е о р е м а о д е л е н и и с о с т а т к о м .

Т е о р е м а 11. Пусть a и b — натуральные числа. Тогда число a можно представить в виде

$$a = b \cdot q + r, \tag{2}$$

где q, r — натуральные числа или 0 и $0 \leq r < b$.

Доказательство. Применим метод математической индукции. Пусть $a = 1$. Рассмотрим два случая: $b = 1$ и $b > 1$. Если $b = 1$, то $1 = 1 \cdot 1 + 0$ и теорема верна. Если же $b > 1$, то $1 = b \cdot 0 + 1$, т. е. утверждение теоремы выполняется и в этом случае. Таким образом, для $a = 1$ теорема верна.

Предположим, что теорема верна для чисел $a \leq k$. Положим $a = k + 1$. Так как $k = b \cdot q + r$, где $0 \leq r < b$, то $k + 1 = b \cdot q + r + 1$. Отсюда, если $r + 1 < b$, то теорема верна. Пусть $r + 1 \geq b$. Так как $r + 1 < k + 1$, то в силу предположения индукции $r + 1 = b \cdot q_1 + r_1$, где $0 \leq r_1 < b$. Поэтому

$$k + 1 = b \cdot q + b \cdot q_1 + r_1 = b(q + q_1) + r_1,\ 0 \leq r_1 < b.$$

Следовательно, для числа $a = k + 1$ утверждение теоремы также выполняется. Это завершает доказательство теоремы.

6. Алгоритм Евклида. Пусть a и b натуральные числа. Тогда в силу доказанной выше теоремы, существуют такие числа q_0 и r_1, что выполняется равенство $a = b \cdot q_0 + r_1$, где $0 \leq r_1 < b$.

Пусть $r_1 > 0$. Делитель b разделим на остаток r_1. Тогда имеет место представление $b = r_1 \cdot q_1 + r_2$, где $0 \leq r_2 < r_1$. Если $r_2 > 0$, то теперь делитель r_1 разделим на остаток r_2 и т. д. Тогда имеем представления:

$$\begin{gathered}
a = b \cdot q_0 + r_1,\ 0 \leq r_1 < b,\\
b = r_1 \cdot q_1 + r_2,\ 0 \leq r_2 < r_1,\\
r_1 = r_2 \cdot q_2 + r_3,\ 0 \leq r_3 < r_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r_{n-3} = r_{n-2} \cdot q_{n-2} + r_{n-1},\ 0 \leq r_{n-1} < r_{n-2},\\
r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_{n-1} + r_n,\ 0 \leq r_n < r_{n-1},\\
r_{n-1} = r_n \cdot q_n.
\end{gathered}$$

По условию $b > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > r_n$. Поэтому этот процесс деления заканчивается после конечного числа делений. Таким образом, мы имеем следующую цепочку делений с остатком:

$$\begin{gathered}
a = b \cdot q_0 + r_1,\ 0 \leq r_1 < b,\\
b = r_1 \cdot q_1 + r_2,\ 0 \leq r_2 < r_1,\\
r_1 = r_2 \cdot q_2 + r_3,\ 0 \leq r_3 < r_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r_{n-3} = r_{n-2} \cdot q_{n-2} + r_{n-1},\ 0 \leq r_{n-1} < r_{n-2},\\
r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_{n-1} + r_n,\ 0 \leq r_n < r_{n-1},\\
r_{n-1} = r_n \cdot q_n,\\
r_{n+1} = 0.
\end{gathered} \tag{3}$$

Такой процесс последовательного деления называется *алгоритмом Евклида*.

Пример 4. Составить алгоритм Евклида для чисел:

1) $a = 9, b = 7$; 2) $a = 22, b = 8$.

Решение.

1) $9 = 7 \cdot 1 + 2,$
$7 = 2 \cdot 3 + 1,$
$2 = 1 \cdot 2.$

2) $22 = 8 \cdot 2 + 6,$
$8 = 6 \cdot 1 + 2,$
$6 = 2 \cdot 3.$

Лемма. Пусть $a = b \cdot q + r$, где $0 \le r < b$. Тогда НОД $(a, b) =$ = НОД (b, r).

Доказательство. Пусть d_1 = НОД (a, b) и d_2 = НОД (b, r). Тогда $a \vdots d_1$ и $b \vdots d_1$. Так как по условию $a = b \cdot q + r$, то из $r = a - b \cdot q$ следует, что $r \vdots d_1$. Тогда d_1 будет общим делителем b и r, а значит, $d_2 \vdots d_1$. Аналогично из того, что $b \vdots d_2$, $r \vdots d_2$ и $a = b \cdot q + r$ следует, что $a \vdots d_2$. Следовательно, $d_1 \vdots d_2$. Отсюда $d_1 = d_2$. Лемма доказана.

Теорема 12. Пусть (3) — алгоритм Евклида, составленный для натуральных чисел a и b. Тогда последний ненулевой остаток r_n является наибольшим общим делителем чисел a и b.

Доказательство. В силу доказанной выше леммы:

$$\text{НОД}\,(a, b) = \text{НОД}\,(b, r_1) = \text{НОД}\,(r_1, r_2) = \text{НОД}\,(r_2, r_3) = \ldots$$
$$= \text{НОД}\,(r_{n-3}, r_{n-2}) = \text{НОД}\,(r_{n-2}, r_{n-1}) = \text{НОД}\,(r_{n-1}, r_n).$$

Но $r_{n-1} \vdots r_n$. Следовательно, НОД $(r_{n-1}, r_n) = r_n$.

Отсюда НОД $(a, b) = r_n$.

Пример 5.

С помощью алгоритма Евклида найти НОД (1067, 582).

Решение. $1067 = 582 \cdot 1 + 485,$
$582 = 485 \cdot 1 + 97,$
$485 = 97 \cdot 5.$

Следовательно, НОД (1067, 582) = 97.

Вопросы и задания

1. Дать определение натурального делителя натурального числа.

2. Написать формулу для вычисления числа делителей натурального числа.

3. Дать определение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного двух натуральных чисел.

4. Написать формулу для вычисления НОД двух натуральных чисел.
5. Перечислить свойства взаимно простых чисел.
6. Написать формулу для вычисления НОК двух натуральных чисел.
7. Сформулировать теорему о делении с остатком.
8. Пусть для любых $a, b \in N$, $a = b \cdot q + r$, $0 \le r < b$. Доказать, что НОД (a, b) = НОД (b, r).
9. Что такое алгоритм Евклида?
10. Рассказать, как можно найти наибольший общий делитель двух на туральных чисел с помощью алгоритма Евклида.

Упражнения

1. Найти каноническое разложение чисел:
а) 160; *б*) 494; *в*) 1001.

2. Найти все простые числа между числами:
а) от 1 до 100; *б*) от 150 до 200.

3. Найти число и сумму натуральных делителей следующих чисел:
а) 60; *б*) 100; *в*) 360.

4. Сколько натуральных чисел меньших, чем 300 имеют с числом 300 наибольший общий делитель, равный 20?

5. Найти наибольший общий делитель следующих чисел:
а) 0 и 0; *б*) 0 и 8; *в*) 231 и 546.

6. Найти наименьшее общее кратное следующих чисел:
а) 360 и 504; *б*) 187 и 533; *в*) 2520 и 6600.

7. Найти наибольший общий делитель следующих чисел: 819, 702 и 689.

8. Найти наименьшее общее кратное следующих чисел: 126, 420 и 525.

9. Доказать следующие утверждения :
а) два последовательных нечетных числа являются взаимно простыми;
б) для любого натурального числа a, числа a и $a + 1$ взаимно простые.

---

10. Найти каноническое разложение чисел: *а*) 1009; *б*) 82798848.

11. Найти все простые числа между числами: *а*) от 1250 до 1300. *б*) от 550 до 600.

12. Найти число и сумму натуральных делителей следующих чисел: *а*) 375; *б*) 720.

13. Найти натуральное число n, если $\tau(n) = 6$.

14. Найти наибольший общий делитель следующих чисел:

а) 1001 и 6253; *б*) 3763 и 3337; *в*) 6791460 и 178500.

15. Найти наименьшее общее кратное следующих чисел:

а) 252 и 468; *б*) 279 и 372; *в*) 178 и 381.

16. Найти наибольший общий делитель следующих чисел: 3059, 2737 и 943.

17. Найти наименьшее общее кратное следующих чисел: 356, 1068 и 1424.

18. Доказать следующие утверждения:

а) если a и b — взаимно простые натуральные числа, то $a - b$ и b при $a > b$ также взаимно простые числа;

б) если a и b — взаимно простые натуральные числа, то $a + b$ и $a \cdot b$ также взаимно простые числа.

§ 4. Сравнения и их свойства

1. Сравнения. Пусть a и b — целые числа (определение целых чисел см. в § 5) и m натуральное число, большее 1. Если $a - b$ делится на m, то говорят, что *a сравнимо с b по модулю m* и пишут $a \equiv b \pmod{m}$.

П р и м е р 1. $a = 5$, $b = 16$, $m = 11$. Тогда $5 - 16 = -11$ и $-11 \vdots 11$. Поэтому можно записать соотношение $5 \equiv 16 \pmod{11}$. Аналогично, можем записать $6 \equiv 17 \pmod{11}$.

Т е о р е м а 1. Если $a, b \in N$, $a \equiv b \pmod{m}$, то числа a и b при делении на число m дают одинаковые остатки.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть для определенности $a \geq b$. Соотношение $a \equiv b \pmod{m}$ означает, что $(a - b) \vdots m$. Другими словами, существует такое число q, что $a - b = m \cdot q$. Отсюда $a = m \cdot q + b$. Пусть $b = m \cdot q' + r$, где $0 \leq r < m$. Тогда

$$a = m \cdot q + m \cdot q' + r = m \cdot (q + q') + r, \text{ где } 0 \leq r < m.$$

Таким образом, числа a и b при делении на число m дают один и тот же остаток r.

Т е о р е м а 2 . Если натуральные числа a и b при делении на число m ($m > 1$) дают один и тот же остаток, то $a \equiv b \pmod{m}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . По условию $a = m \cdot q + r$, где $0 \le r < m$ и $b = m \cdot q' + r$, где $0 \le r < m$. Тогда $a - b = (m \cdot q + r) - (m \cdot q' + r) = m \cdot q - m \cdot q' = m \cdot (q - q')$.

Значит, $a - b = m \cdot (q - q')$. Отсюда $a \equiv b \pmod m$.

2. Свойства сравнений. Пусть m — целое число большее, чем 1. Отношение сравнения обладает следующими свойствами:

1^0. Для любых целых чисел a и m ($m > 1$), $a \equiv a \pmod m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . $a - a = 0$ и $0 \,\vdots\, m$. Следовательно, $a \equiv a$ $(\mathrm{mod}\, m)$.

2^0. Если для целых чисел a и b, $a \equiv b \pmod m$, то $b \equiv a \pmod m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . $a \equiv b \pmod m$. Это означает, что $(a - b) \,\vdots\, m$. Тогда $-(a - b) \,\vdots\, m$ или $(b - a) \,\vdots\, m$. Отсюда $b \equiv a \pmod m$.

3^0. $a \equiv b \pmod m$ и $b \equiv c \pmod m$. Тогда $a \equiv c \pmod m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $a \equiv b \pmod m$ и $b \equiv c \pmod m$. Тогда $(a - b) \,\vdots\, m$ и $(b - c) \,\vdots\, m$. Отсюда $((a - b) + (b - c)) \,\vdots\, m$ или $(a - c) \,\vdots\, m$. Это означает, что $a \equiv c \pmod m$.

4^0. Сравнения можно почленно складывать и почленно вычитать, т. е., если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то $a + c \equiv b + d$ (mod m) и $a - c \equiv b - d \pmod m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . По условию $(a - b) \,\vdots\, m$ и $(c - d) \,\vdots\, m$. Тогда $((a - b) + (c - d)) \,\vdots\, m$ или $((a + c) - (b + d)) \,\vdots\, m$. Это означает, что $a + c \equiv b + d \pmod m$.

Вторая часть рассматриваемого свойства доказывается аналогично.

5^0. Если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod m$, т. е. сравнения можно почленно умножать.

Д о к а з а т е л ь с т в о . По условию $(a - b) \,\vdots\, m$ и $(c - d) \,\vdots\, m$. Имеем равенства

$$a \cdot c - b \cdot d = a \cdot c - c \cdot b + c \cdot b - b \cdot d = c \cdot (a - b) + b \cdot (c - d).$$

Так как $(a - b) \,\vdots\, m$, $(c - d) \,\vdots\, m$, то $(c \cdot (a - b) + b \cdot (c - d)) \,\vdots\, m$. Другими словами, $(a \cdot c - b \cdot d) \,\vdots\, m$ или же $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod m$.

6^0. Обе части сравнения можно умножать на любое целое число. При этом сравнение сохранится.

Д о к а з а т е л ь с т в о . По условию $a \equiv b \pmod m$. В силу свойства 1^0 имеем $c \equiv c \pmod m$. Тогда в силу свойства 5^0 получим, что $a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod m$.

3. Применение отношения сравнения к доказательству признаков делимости. Известно, что каждое натуральное число записывается с помощью десяти цифр — 0, 1, 2, ... , 9. Например, 327 означает $300 + 20 + 7$ или $3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7$, т. е. $3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7$. В дальнейшем, чтобы отличить натуральное число $a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0$, образованное с помощью цифр $a_n, a_{n-1}, \ldots,$ $a_1, a_0 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ от произведения чисел $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$, будем записывать его в виде $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$. Сумма $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ называется десятичным разложением числа $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$.

1^0. *Признак делимости на 2.*

Теорема 3. Натуральное число a делится на 2 тогда и только тогда, когда оно заканчивается четной цифрой.

Доказательство. Пусть $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ — десятичное разложение числа a. Поскольку $10^n, 10^{n-1}, \ldots, 10$ делятся на 2, то для делимости числа a на 2 необходимо и достаточно, чтобы a_0 делилось на 2. Значит, последняя цифра a_0 принимает значения 0, 2, 4, 6 или 8.

2^0. *Признак делимости на 3.*

Теорема 4. Натуральное число a делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр, образующих это число, делится на 3.

Доказательство. Рассмотрим следующие сравнения:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \equiv 1 \pmod 3 \\ 10 \equiv 1 \pmod 3 \\ 10^2 \equiv 1 \pmod 3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 10^n \equiv 1 \pmod 3 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Тогда

$$\left.\begin{array}{l} a_0 \equiv a_0 \pmod 3 \\ a_1 \cdot 10 \equiv a_1 \pmod 3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} \cdot 10^{n-1} \equiv a_{n-1} \pmod 3 \\ a_n \cdot 10^n \equiv a_n \pmod 3 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Складывая почленно сравнения (2), получим:

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \pmod 3.$$

Левая часть полученного сравнения равно числу a, правая часть состоит из суммы цифр, образующих число a. Тогда из теорем 1, 2 вытекает, что $a \,\vdots\, 3$ тогда и только тогда, когда сумма цифр, образующих число a, делится на 3.

3^0. *Признак делимости на 4.*

Т е о р е м а 5. Натуральное число a делится на 4 тогда и только тогда, когда число, образованное последними двумя цифрами данного числа, делится на 4.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ...+ a_1 \cdot 10+ + a_0$ — десятичное разложение натурального числа a. Рассмотрим следующие сравнения:

$$\left.\begin{aligned} &1 \equiv 1 \pmod 4 \\ &10 \equiv 10 \pmod 4 \\ &10^2 \equiv 0 \pmod 4 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &10^n \equiv 0 \pmod 4 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Умножая обе части этих сравнений на числа $a_n, a_{n-1}, \dots , a_1, a_0$, получим:

$$\left.\begin{aligned} &a_0 \equiv a_0 \pmod 4 \\ &a_1 \cdot 10 \equiv a_1 \cdot 10 \pmod 4 \\ &a_2 \cdot 10^2 \equiv 0 \pmod 4 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{n-1} \cdot 10^{n-1} \equiv 0 \pmod 4 \\ &a_n \cdot 10^n \equiv 0 \pmod 4 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Складывая почленно сравнения (4), имеем

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_1 \cdot 10 + a_0 \pmod 4,$$

или $a \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod 4$, откуда в силу теорем 1 и 2 получаем доказательство теоремы 5.

4^0. *Признак делимости на 5.*

Т е о р е м а 6. Натуральное число a делится на 5 тогда и только тогда, когда это число заканчивается либо цифрой пять, либо нулем.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Рассмотрим сравнения:

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 \equiv 0 \pmod 5) \text{ и } a_0 \equiv a_0 \pmod 5.$$

Почленно складывая их, получим сравнение:

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_0 \pmod 5.$$

Это означает, что число делится на 5 тогда и только тогда, когда последняя цифра данного числа делится на 5. Но среди всех цифр только 0 и 5 делятся на 5.

5^0. *Признак делимости на 6.*

Теорема 7. Если натуральное число делится на 2 и на 3, то оно делится на 6. Обратно, если натуральное число делится на 6, то оно делится на 2 и на 3.

Доказательство. Пусть натуральное число a делится на 2 и на 3. Тогда, поскольку 2 и 3 взаимно простые числа, то число a делится и на их произведение, т. е. $a \;\vdots\; 6$.

Обратно, если $a \;\vdots\; 6$, то существует такое целое число q, что $a = 6 \cdot q$. Очевидно, что $(6 \cdot q) \;\vdots\; 2$ и $(6 \cdot q) \;\vdots\; 3$. Поэтому число a делится на 2 и на 3.

6^0. *Признак делимости на 8.*

Теорема 8. Натуральное число a делится на 8 тогда и только тогда, когда число, образованное последними тремя цифрами числа a, делится на 8.

Доказательство. Пусть $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$ — десятичное разложение натурального числа a. Рассмотрим сравнение $1000 \equiv 0 \pmod 8$. Поэтому $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_3 \cdot 10^3 \equiv 0 \pmod 8$. Отсюда получаем сравнение:

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \pmod 8.$$

Следовательно, $a \equiv \overline{a_2a_1a_0} \pmod 8$. Таким образом, число a делится на 8 тогда и только тогда, когда число $\overline{a_2a_1a_0}$ делится на 8.

Аналогично можно доказать следующие признаки делимости:

7^0. *Признак делимости на 9.*

Теорема 9. Натуральное число a делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр данного натурального числа делится на 9.

8^0. *Признак делимости на 10.*

Теорема 10. Натуральное число a делится на 10 тогда и только тогда, когда последняя цифра числа равна нулю.

9^0. *Признак делимости на 11.*

Теорема 11. Натуральное число a делится на 11 тогда и только тогда, когда разность суммы цифр, стоящих на нечетных местах и суммы цифр, стоящих на четных местах, делится на 11.

Пример 2. Число 1031305 делится на 11. Действительно, сумма цифр, стоящих на нечетных местах, равна $1 + 3 + 3 + 5 = 12$, а сумма цифр, стоящих на четных местах, равна $0 + 1 + 0 = 1$. Их разность $12 - 1 = 11$ делится на 11.

Пример 3. Число 132582 делится на 3, но не делится на 9. Действительно, сумма цифр данного числа равна $1 + 3 + 2 + 5 + 8 + 2 = 21$. Число 21 делится на 3, но на 9 не делится. Поэтому 132582 делится на 3, но не делится на 9.

Вопросы и задания

1. Дать определение отношения сравнения.
2. Перечислить свойства отношения сравнения.
3. Сформулировать признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11.
4. Рассказать о применении отношения сравнения.

Упражнения

1. Найти частное и остаток от деления:

а) 1207 на 151; *б*) 20 на 20; *в*) 100 на 101.

2. Доказать, что если каждое из двух чисел при делении на натуральное число m дает остаток 1, то их произведение при делении на m также дает остаток 1.

3. Доказать верность следующих сравнений:
а) $31 \equiv -9 \pmod 2$;
б) $(k^2 - 1) \equiv 1 \pmod k$, где $k > 1$;
в) $(2k + 1)^2 \equiv (2k - 1)^2 \pmod 2$.

4. Найти последнюю цифру следующих чисел:

а) 203^{20}; *б*) 243^{402}.

5. Найти признаки делимости на 25, 18, 45.

---

6. Найти частное и остаток от деления:
а) –4 на 3; *б*) –23 на 6; *в*) –18 на 5.

7. Доказать верность следующих сравнений:
а) $15 \equiv 3 \pmod 4$;
б) $121 \equiv 13145 \pmod 2$;
в) $121347 \equiv 92817 \pmod 5$.

8. Найти последнюю цифру следующих чисел:
а) $1812 \cdot 1941 \cdot 1965$; *б*) $(116 + 17^{17})^{21}$.

9. Найти признаки делимости на 12, 15.

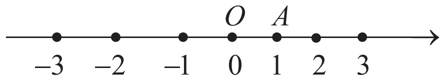
§ 5. Рациональные числа

1. Целые числа. Присоединив к множеству натуральных чисел число 0, получим множество $N_0 = \{0, 1, 2, ...\}$, которое называется множеством всех неотрицательных целых чисел. Расширим множество N_0, присоединяя к нему все числа, противоположные натуральным числам. В результате получим множество:

$$\{... , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

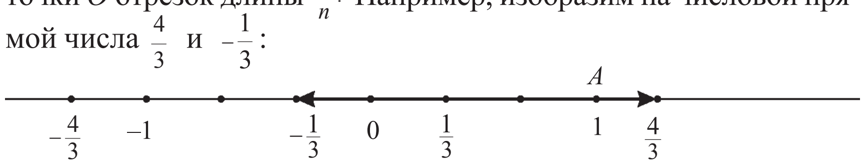
Это множество называется *множеством всех целых чисел* и обозначается через Z.

Геометрически целые числа можно изобразить на прямой следующим образом. На некоторой прямой l совершенно произвольно выберем точку O, и назовем ее "начальной" точкой. Направление на прямой l вправо от точки O назовем положительным, а направление на прямой l влево от точки O назовем отрицательным. Отметим также некоторую точку A справа от точки O и отрезок OA назовем единичным отрезком. Целые числа на прямой будем обозначать следующим образом: для того чтобы обозначить положительное целое число n, отложим отрезок OA в положительном направлении n раз от точки O. Правый конец последнего отрезка будет соответствовать числу n. Для того чтобы отметить число $-n$, отрезок OA отложим n раз в отрицательном направлении от точки O. Левый конец последнего отрезка будет соответствовать числу $-n$. Числу 0 сопоставим точку O. В итоге получим прямую, на которой обозначены все целые числа:



Прямая, на которой выбраны начальная точка, положительное направление и единичный отрезок, называется *числовой прямой.*

2. Рациональные числа. Числа, которые можно представить в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$, где p, q — целые числа и $q \neq 0$, называются *рациональными числами*. Положительное рациональное число $\frac{m}{n}$, где m, n — натуральные числа, можно изобразить на числовой прямой точкой C, которая может быть получена следующим образом: отрезок OA разделим на n равных частей, затем отложим m таких же частей от точки O в положительном направлении числовой прямой. Правый конец последнего отрезка будет соответствовать числу $\frac{m}{n}$. Аналогично можно изобразить отрицательное рациональное число $-\frac{m}{n}$ отложив m раз влево от точки O отрезок длины $\frac{1}{n}$. Например, изобразим на числовой прямой числа $\frac{4}{3}$ и $-\frac{1}{3}$:



Таким образом, каждому рациональному числу на числовой прямой соответствует единственная точка.

Рациональные числа $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ считаются равными, если $a \cdot d = b \cdot c$.

Действительно, если $a \cdot d = b \cdot c$, то $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{c}{d}$.

На множестве рациональных чисел выполнимы операции сложения, умножения, вычитания и деления (кроме деления на нуль). Напомним, как определяются эти операции:

1. Сумма рациональных чисел $\frac{m}{n}$ и $\frac{k}{l}$ определяется по формуле:

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{m \cdot l + n \cdot k}{n \cdot l}.$$

2. Произведение рациональных чисел $\frac{m}{n}$ и $\frac{k}{l}$ определяется по формуле:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} = \frac{m \cdot k}{n \cdot l}.$$

П р и м е р 1. $\frac{^{3/}1}{4} + \frac{^{4/}1}{3} = \frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$.

П р и м е р 2. $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$.

Операции сложения и умножения обладают следующими свойствами:

1. $\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{k}{l} + \frac{m}{n}$ — *закон коммутативности сложения*.
2. $\left(\frac{m}{n} + \frac{k}{l}\right) + \frac{p}{q} = \frac{m}{n} + \left(\frac{k}{l} + \frac{p}{q}\right)$ — *закон ассоциативности сложения.*
3. $\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} = \frac{k}{l} \cdot \frac{m}{n}$ — *закон коммутативности умножения.*
4. $\left(\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l}\right) \cdot \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \left(\frac{k}{l} \cdot \frac{p}{q}\right)$ — *закон ассоциативности умножения.*
5. $\left(\frac{m}{n} + \frac{k}{l}\right) \cdot \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} + \frac{k}{l} \cdot \frac{p}{q}$ — *закон дистрибутивности умножения относительно сложения.*

Операция вычитания рациональных чисел определяется с помощью формулы:

$$\frac{m}{n} - \frac{k}{l} = \frac{m \cdot l - n \cdot k}{n \cdot l}.$$

Частное от деления рационального числа $\frac{m}{n}$ на рациональное число $\frac{k}{l}$ определяется по формуле:

$$\frac{m}{n} : \frac{k}{l} = \frac{m \cdot l}{n \cdot k}, \text{ где } k \neq 0.$$

П р и м е р 3. $\frac{{}^{7\diagup}2}{5} - \frac{{}^{5\diagup}1}{7} = \frac{14 - 5}{35} = \frac{9}{35}.$

П р и м е р 4. $\frac{7}{11} : \frac{15}{23} = \frac{7 \cdot 23}{11 \cdot 15} = \frac{161}{165}.$

3. Десятичные дроби. Любая дробь вида $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$, где p и q целые числа, называется *обыкновенной дробью*. Любое число вида $a_0, a_1\, a_2\, a_3 \ldots$, где $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ — некоторые цифры, называется *десятичной дробью*. Если в записи десятичной дроби участвует конечное число цифр, например, 2,3454, то оно называется *конечной десятичной дробью*. В ином случае, десятичная дробь называется *бесконечной*. Десятичная дробь, в записи которой после запятой некоторая цифра или группа цифр повторяется подряд бесконечное число раз, называется *периодической десятичной дробью*. При этом повторяющаяся цифра или группа цифр называется *периодом периодической десятичной дроби*. Если в записи бесконечной десятичной дроби нет повторяющейся подряд цифры или группы цифр, то такая десятичная дробь называется *непериодической*.

Для представления рационального числа $\frac{p}{q}$ в виде десятичной дроби, нужно числитель дроби разделить на знаменатель. В результате получим либо конечную, либо бесконечную десятичную дробь.

Рассмотрим примеры.

П р и м е р 5. Число $\frac{5}{8}$ представить в виде десятичной дроби.

Р е ш е н и е.

$$\begin{array}{r|l}
5 & 8 \\ \cline{2-2}
\underline{0} & 0{,}625 \\
50 & \\
\underline{48} & \\
20 & \\
\underline{16} & \\
40 & \\
\underline{40} & \\
0 &
\end{array}$$

П р и м е р 6. Числа $\frac{5}{7}$ и $\frac{17}{22}$ представить в виде десятичной дроби.

$$
\begin{array}{l|l}
5 & 7 \\
\underline{0} & 0,714285714285\ldots \\
\ 50 & \\
\ \underline{49} & \\
\quad 10 & \\
\quad \ \underline{7} & \\
\quad \ 30 & \\
\quad \ \underline{28} & \\
\qquad 20 & \\
\qquad \underline{14} & \\
\qquad \ 60 & \\
\qquad \ \underline{56} & \\
\qquad \quad 40 & \\
\qquad \quad \underline{35} & \\
\qquad \qquad 50 & \\
\qquad \qquad \underline{49} & \\
\qquad \qquad \ 10 & \\
\qquad \qquad \quad \underline{7} & \\
\qquad \qquad \quad 30\ldots &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
17 & 22 \\
\underline{0} & 0,7727272\ldots \\
170 & \\
\underline{154} & \\
\ \ 160 & \\
\ \ \underline{154} & \\
\qquad 60 & \\
\qquad \underline{44} & \\
\qquad 160 & \\
\qquad \underline{154} & \\
\qquad \quad 60 & \\
\qquad \quad \underline{44} & \\
\qquad \quad \ 160 & \\
\qquad \quad \ \underline{154} & \\
\qquad \qquad 60 & \\
\qquad \qquad \underline{44} & \\
\qquad \qquad 16\ldots &
\end{array}
$$

В рассмотренных примерах мы получили выражения:

$$\frac{5}{8} = 0,625 = 0,625000\ \ldots$$
$$\frac{5}{7} = 0,714285714285\ \ldots$$
$$\frac{17}{22} = 0,77272\ \ldots\ .$$

В примере 5 мы получили конечную десятичную дробь. Отметим, что ее можно рассматривать и как бесконечную периодическую десятичную дробь, с периодом 0. В примере 6 мы получили бесконечные периодические десятичные дроби с периодами, равными соответственно 714285 и 72.

Если период начинается сразу после запятой (например, 0,714285714285 ...), то такая дробь называется *простой*. В противном случае (например, 0,77272 ...) дробь называется *смешанной.*

Т е о р е м а . Пусть $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь с положительным знаменателем q, каноническое разложение которого состоит только из степеней простых чисел 2 и 5, т. е. $q = 2^s \cdot 5^t$, где $s, t \in N_0$. Тогда $\frac{p}{q}$ можно представить в виде конечной десятичной дроби.

Доказательство. Действительно,

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{2^s \cdot 5^t} = \frac{p \cdot 2^t \cdot 5^s}{2^{s+t} \cdot 5^{t+s}} = \frac{p \cdot 2^t \cdot 5^s}{10^{s+t}}$$ — конечная десятичная дробь.

При делении целого числа p на натуральное число q, каждый шаг деления приводит к своему остатку. Как бы различны ни были эти остатки, ни один из них не может быть больше чем q. Поэтому, после некоторого шага, остатки начнут повторяться, а это приводит к периодичности частного. Следовательно, при делении на q мы непременно получим периодическую десятичную дробь. Таким образом, всякое рациональное число $\frac{p}{q}$ может быть представлено в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Верно и обратное утверждение: всякая периодическая десятичная дробь может быть представлена как обыкновенная дробь, иначе говоря, всякая периодическая десятичная дробь является рациональным числом.

Пример 7. Периодическую десятичную дробь 0,231231 ... представить в виде обыкновенной дроби.

Решение. Обозначим данную десятичную дробь через x, т. е.

$$x = 0{,}231231\ \ldots \qquad (1)$$

Она имеет период, равный 231. Умножая обе части равенства (1) на 1000, получим:

$$1000\,x = 231{,}\,231231\ \ldots \qquad (2)$$

Вычитая из равенства (2) почленно равенство (1), получим $999x = 231$. Откуда $x = \frac{231}{999}$.

Пример 8. Смешанную периодическую дробь 3,73232 ... представить в виде обыкновенной дроби.

Решение. Пусть $x = 3{,}73232\ \ldots$. Тогда

$$10\,x = 37{,}3232\ \ldots \qquad (3)$$

$$1000\,x = 3732{,}3232\ \ldots \qquad (4)$$

Вычитая из (4) почленно равенство (3), получим $990x = 3695$. Откуда $x = \frac{3695}{990} = 3\frac{725}{990}$.

Существуют и другие способы представления периодической десятичной дроби в виде обыкновенной дроби.

П р и м е р 9. Представить 12,73535 ... в виде обыкновенной дроби.

Р е ш е н и е: $12,73535... = \dfrac{127,3535...}{10} = \dfrac{127 + 0,3535...}{10} = \dfrac{127 + \dfrac{35}{99}}{10} =$

$= \dfrac{127 \cdot 99 + 35}{990} = \dfrac{12608}{990}$.

Вопросы и задания

1. Как определяется множество целых чисел?
2. Что называется числовой прямой?
3. Как изображаются целые числа на числовой прямой?
4. Дать определение рационального числа.
5. Как изображаются рациональные числа на числовой прямой?
6. Дать определение равенства двух рациональных чисел.
7. Дать определение суммы двух рациональных чисел.
8. Перечислить свойства суммы рациональных чисел.
9. Как определяется операция вычитания рациональных чисел?
10. Дать определение произведения двух рациональных чисел.
11. Перечислить свойства произведения рациональных чисел.
12. Как определяется операция деления рациональных чисел?
13. Что называется обыкновенной дробью, десятичной дробью?
14. Какие десятичные дроби называются периодическими, какие — непериодическими?
15. Какие рациональные числа можно представить в виде конечной десятичной дроби?
16. Чем отличаются простые и смешанные дроби?

Упражнения

1. Вычислить значения следующих выражений:

а) $(8 - 0,35) : 7,65 + 9,8;$ *б*) $(\frac{2}{3} + 0,25) : 18,33...$.

2. Обыкновенные дроби записать в виде бесконечной десятичной дроби:

а) $\frac{15}{8}$; *б*) $-\frac{46}{27}$.

3. Доказать, что дробь 0,12345678910111213 ... , получающаяся от написания после нуля всех натуральных чисел, не является рациональным числом.

4. Используя после запятой только цифры 5 и 7, написать число, не являющееся рациональным числом.

5. Между данными числами поставить требуемые знаки — неравенства или равенства:

а) 4,63479... и 463497; *в*) –2,4833... и –2,5829... .

б) 15,5 и $\frac{62}{4}$;

6. Привести пример двух дробей, которые представимы в виде конечных десятичных дробей, отношение которых нельзя представить в виде конечной десятичной дроби.

7. Следующие периодические дроби представить в виде обыкновенной дроби:

а) 0,(25); *б*) 101,8(5); *в*) 42,75828282... .

---

8. Вычислить значения следующих выражений:

а) $\left(\frac{1}{2}:1,25+1,4:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\cdot 0,3$; *б*) $\left(2,7-\frac{4}{5}\right)\cdot 2,3...+0,11...$.

9. Обыкновенные дроби записать в виде бесконечной десятичной дроби:

а) $\frac{3}{7}$; *б*) 0; *в*) $-\frac{11}{28}$.

10. Пусть $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь. Если $\frac{m}{n}$ можно представить в виде конечной десятичной дроби, то на какие числа может делиться без остатка знаменатель n?

11. Между данными числами поставьте требуемые знаки — неравенства или равенства:

а) –16,0010... и –16,0001; *б*) 0 и 0,000005... .

12. Следующие периодические дроби представить в виде обыкновенной дроби:

а) 0,7272...; *б*) 32,030303... .

§ 6. Действительные числа

1. Иррациональные числа. В предыдущем параграфе мы показали, что каждому рациональному числу соответствует единственная точка на числовой прямой. Интересна обратная задача, а именно: соответствует ли каждой точке числовой прямой некоторое рациональное число. Оказывается, что на числовой прямой существуют такие точки, которые не соответствуют рациональным числам.

Теорема. Пусть p — простое число. Тогда не существует рационального числа, квадрат которого равен p.

Доказательство. Предположим, что существует рациональное число $\frac{m}{n}$, где НОД $(m, n) = 1$, такой, что $\frac{m^2}{n^2} = p$. Тогда $m^2 = p \cdot n^2$. Следовательно, $m^2 \vdots p$. Отсюда получим, что $m \vdots p$. Значит, существует такое целое число q, что $m = p \cdot q$ и $p \cdot n^2 = p^2 \cdot q^2$. Сократив обе части полученного равенства на p, получим $n^2 = p \cdot q^2$. Тогда $n^2 \vdots p$, т. е. $n \vdots p$. Таким образом, p — общий делитель чисел m и n. Это противоречит условию НОД $(m, n) = 1$.

Следствие. Числа вида $\sqrt{p}$, где p — простое число, не являются рациональными числами.

Множество простых чисел бесконечно. Поэтому существует бесконечное множество чисел вида $\sqrt{p}$, которые не являются рациональными. Геометрически отрезки длины $\sqrt{p}$ можно изобразить следующим образом. Построим на плоскости равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами длины 1. Тогда длина гипотенузы этого треугольника будет равна $\sqrt{2}$. Число $\sqrt{2}$ не является рациональным числом. Теперь построим прямоугольный треугольник с катетами длины $\sqrt{2}$ и 1. Такой треугольник имеет гипотенузу, длина которой равна $\sqrt{3}$ и т. д. (рис. 12). Таким образом, для любого простого числа p можно построить отрезок, длина которого равна $\sqrt{p}$.

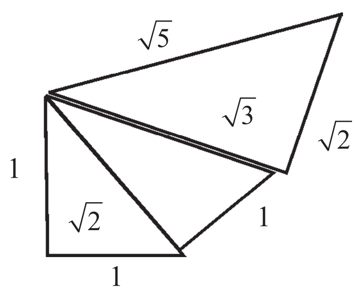


Рис. 12

Согласно рассуждениям, приведенным в § 5, характерной чертой рациональных чисел является то, что их можно представить в виде периодических десятичных дробей. Точкам на числовой прямой, не являющимся изображением рационального числа, соответствуют бесконечные непериодические десятичные дроби, называемые *иррациональными числами*. Например, непериодические десятичные дроби $\sqrt{2} = 1{,}4142...$, $\pi = 3{,}1415...$ — являются иррациональными числами. Множество всех рациональных и иррациональных чисел по определению образуют *множество действительных чисел*. Таким образом, множество всех действительных чисел состоит из всех периодических десятичных дробей и всех непериодических бесконечных десятичных дробей.

2. Сравнение иррациональных чисел. Число π.

Отрезок AB называется *мерой* для отрезка CD, если AB укладывается ровно целое число раз на отрезке CD. Отрезок AB называется *общей мерой* для отрезков CD и EF, если AB является мерой для обоих отрезков.

П р и м е р 1. На рис. 13 изображен отрезок AB, являющийся общей мерой для отрезков CD и EF.

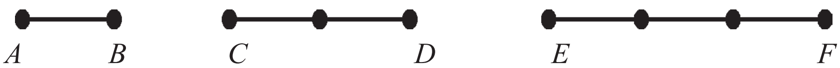


Рис. 13

В примере 1 отрезок AB примем за единицу измерения, обозначим его длину через $|AB|$ и приравняем к 1. Тогда $|CD| = 2$, $|EF| = 3$ и отношение длин данных отрезков выражается рациональным числом $\frac{|EF|}{|CD|} = \frac{3}{2}$.

Отрезки, которые имеют общую меру, будем называть *соизмеримыми*, и *несоизмеримыми* в противном случае.

Пусть CD и EF — соизмеримые отрезки и отрезок AB их мера. Положим, что отрезок AB укладывается на отрезках CD и EF соответственно ровно n и m раз. Тогда отношение длин отрезков EF и CD выражается рациональным числом $\frac{m}{n}$.

Поэтому, отношение длин соизмеримых отрезков всегда есть рациональное число. Но не все отрезки являются соизмеримыми.

П р и м е р 2. Диагональ любого квадрата не соизмерима с его стороной.

Действительно, в противном случае отношение длин отрезков AC и AB было бы рациональным числом (рис. 14). Но поскольку $AC^2 = 2AB^2$, то $\frac{|AC|}{|AB|} = \sqrt{2}$. Как мы знаем, число $\sqrt{2}$ не является рациональным числом. Следовательно, отрезки AC и AB несоизмеримы.

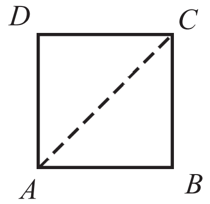
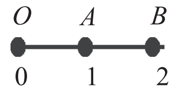


Рис. 14

Поскольку каждое рациональное число выражается периодической десятичной дробью, а из доказанной в пункте 1 теоремы следует, что $\sqrt{2}$ не является рациональным числом, то отсюда вытекает, что $\sqrt{2}$ не выражается периодической десятичной дробью. На примере числа $\sqrt{2}$ покажем, как представлять иррациональные числа в виде десятичных дробей.

Возьмем отрезок OB, с длиной равной числу 2:



Поскольку $1^2 < 2 < 2^2$, то $1 < \sqrt{2} < 2$. Следовательно, $\sqrt{2}$ лежит на отрезке AB. Отрезок AB разделим на десять равных частей. Тогда имеем (рис. 15):

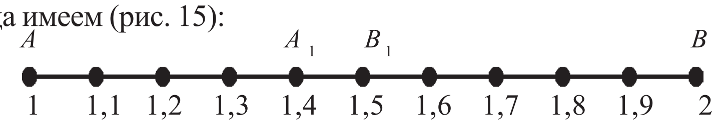
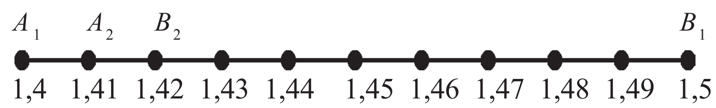


Рис. 15

Нетрудно проверить, что $1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$ или $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$. Значит, точка изображающая число $\sqrt{2}$ лежит на отрезке A_1B_1. Повторяя тем же способом деление отрезка A_1B_1 на равные части, получим:



Продолжая деление соответствующих отрезков, имеем неравенства:

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42;$$
$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415;$$
$$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Данный процесс можно продолжить бесконечное число раз, так как в противном случае число $\sqrt{2}$ совпало бы с одним из рациональных чисел. В качестве приближенного значения $\sqrt{2}$ с недостатком можно взять числа 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142 и т. д., а с избытком можно взять числа 2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143 и т. д. Таким образом, число $\sqrt{2} = 1{,}4142...$.

Два положительных иррациональных числа называются равными, если их целые части и соответствующие десятичные знаки после запятой являются одинаковыми. Очевидно, что если два иррациональных числа с одинаковыми целыми частями не равны, то одно из чисел содержит десятичный знак, не совпадающий с соответствующим десятичным знаком другого числа. Например, число 1,41... не равно числу 1,42... .

Рассмотрим неравные, иррациональные числа α и β. Если целые части этих чисел не равны, то большим числом считается то, у которого больше целая часть. Например, 2,41... > 1,41... . Если же целые части у них равны, то сравнивают первые десятичные знаки после запятой. Большим будет то число, у которого больше первый десятичный знак после запятой. Если же и эти знаки равны, то сравнивают следующие десятичные знаки и т. д. Например, 3,7123... > 3,7034... ; 100,3371... > 100,3368... .

Напомним, что числовой прямой называется произвольная прямая с выбранными на ней началом координат O, масштабом измерения и направлением. Аналогично случаю рациональных чисел, каждому действительному числу можно поставить в соответствие некоторую точку на числовой прямой. Если α — некоторое положительное действительное число, то поставим ему в соответствие точку A, лежащую справа от точки O на расстоянии в α единиц длины, а числу $-\alpha$ поставим в соответствие точку A', симметричную точке A относительно начала координат O. Например, если $\alpha = 1{,}4125...$ — иррациональное число, то $1 < \alpha < 2$; $1{,}4 < \alpha < 1{,}5$; $1{,}41 < \alpha < 1{,}42$ и т. д. Очевидно, что в этом случае точка A лежит правее точек, соответствующих числам 1; 1,4 ; 1,41; ... , и левее точек, соответствующих числам 2; 1,5; 1,42; ...

Можно убедиться, что эти условия определяют на числовой прямой единственную точку A, рассматриваемую как геометрическое представление действительного (иррационального) числа $\alpha = 1{,}4125...$. Следовательно, каждому действительному числу соответствует единственная точка на числовой прямой, а именно, его геометрическое представление (различным числам соответствуют различные точки числовой прямой). Верно и обратное утверждение: каждой точке на числовой прямой соответствует некоторое действительное число. Если отрезок, представляющий эту точку, соизмерим с единичным отрезком, то этой точке соответствует рациональное число. В противном случае, точке соответствует иррациональное число.

Отметим еще следующее. Известно, что отношение длины L окружности к ее диаметру d не зависит от длины диаметра. Это отношение является постоянным числом. Оно обозначается через π ($\pi = 3{,}1415926...$). Можно показать, что это число является бесконечной непериодической десятичной дробью, т. е. иррациональным числом.

3. Целая и дробная части действительного числа. Пусть α — некоторое действительное число. Наибольшее целое число, не большее чем число α, называется *целой частью* действительного числа α. Целая часть числа α обозначается через $[\alpha]$. Разность $\alpha - [\alpha]$ называется *дробной частью* действительного числа α. Дробная часть числа α обозначается через $\{\alpha\}$.

П р и м е р 3. Найти целую и дробную части числа $-1{,}2$.

Р е ш е н и е. Число -2 является наибольшим целым числом, удовлетворяющим неравенству $-2 \le -1{,}2$. Поэтому $[-1{,}2\,] = -2$. Дробная часть данного числа равна $\{-1{,}2\,\} = -1{,}2 - (-2) = -1{,}2 + 2 = 0{,}8$.

П р и м е р 4. Найти целую и дробную части числа $\sqrt{3}$.

Р е ш е н и е. Так как $1 < \sqrt{3} < 2$, то $[\sqrt{3}\,] = 1$ и $\{\sqrt{3}\,\} = \sqrt{3} - 1$.

П р и м е р 5. $[1{,}3] = 1$ и $\{1{,}3\} = 0{,}3$.

Из определения следует, что дробная часть $\{\alpha\}$ действительного числа α является неотрицательным числом и $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$, т. е. любое действительное число можно представить как сумму целой и дробной частей данного числа.

4. Арифметические операции над действительными числами. Пусть α, β — действительные числа. Если они оба рациональные, то их сложение производится по правилу сложения рациональных чисел. Если одно из этих чисел (или оба числа) иррациональное, то их суммой полагают действительное число, обозначаемое как $\alpha + \beta$, которое больше всех сумм соответственных десятичных приближений этих чисел с недостатком, и меньше всех сумм соответственных десятичных приближений этих чисел с избытком.

П р и м е р 6. Найти десятичные приближения суммы $\frac{1}{3} + \sqrt{3}$ с точностью до третьего знака после запятой.

Р е ш е н и е . Выпишем десятичные приближения чисел $\frac{1}{3}$ и $\sqrt{3}$:

$$0 < \frac{1}{3} < 1; \qquad 1 < \sqrt{3} < 2;$$
$$0{,}3 < \frac{1}{3} < 0{,}4; \qquad 1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8;$$
$$0{,}33 < \frac{1}{3} < 0{,}34; \qquad 1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74;$$
$$0{,}333 < \frac{1}{3} < 0{,}334; \qquad 1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733;$$
. . . .

Тогда:

$$(0 + 1) < \frac{1}{3} + \sqrt{3} < (1 + 2); \quad \text{или} \quad 1 < \frac{1}{3} + \sqrt{3} < 3;$$
$$(0{,}3 + 1{,}7) < \frac{1}{3} + \sqrt{3} < (0{,}4 + 1{,}8); \qquad 2 < \frac{1}{3} + \sqrt{3} < 2{,}2;$$
$$(0{,}33 + 1{,}73) < \frac{1}{3} + \sqrt{3} < (0{,}34 + 1{,}74); \qquad 2{,}06 < \frac{1}{3} + \sqrt{3} < 2{,}08;$$
$$(0{,}333 + 1{,}732) < \frac{1}{3} + \sqrt{3} < (0{,}334 + 1{,}733); \qquad 2{,}065 < \frac{1}{3} + \sqrt{3} < 2{,}067;$$
. . . .

Операция сложения действительных чисел удовлетворяет законам коммутативности и ассоциативности:

1^0. Если α, β — действительные числа, то $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

2^0. Если α, β, γ — действительные числа, то $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

Разностью действительных чисел α, β называется такое действительное число γ, что $\beta + \gamma = \alpha$. Иначе говоря, разность двух чисел α и β — это сумма вида $\alpha + (-\beta)$ и она обозначается через $\alpha - \beta$.

П р и м е р 7. Пусть $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$. Воспользуемся десятичными приближениями чисел $\sqrt{3}$ и $-\frac{1}{3}$. Тогда

$$-1 < -\frac{1}{3} < 0; \qquad 1 < \sqrt{3} < 2;$$
$$-0{,}4 < -\frac{1}{3} < -0{,}3; \qquad 1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8;$$
$$-0{,}34 < -\frac{1}{3} < -0{,}33; \qquad 1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74;$$
$$-0{,}334 < -\frac{1}{3} < -0{,}333; \qquad 1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733;$$
. . . .

Складывая почленно соответствующие неравенства, имеем :

$$0 < \sqrt{3} - \frac{1}{3} < 2;$$

$$1{,}3 < \sqrt{3} - \frac{1}{3} < 1{,}5;$$

$$1{,}39 < \sqrt{3} - \frac{1}{3} < 1{,}41;$$

$$1{,}398 < \sqrt{3} - \frac{1}{3} < 1{,}400;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Пусть α, β — действительные числа. Если оба числа рациональные, то их произведение определяется по правилам умножения рациональных чисел.

Пусть α и β — положительные действительные числа и хотя бы одно из этих чисел является иррациональным числом. Тогда их произведением полагают действительное число, которое больше всех произведений соответственных десятичных приближений этих чисел с недостатком, и меньше всех произведений соответственных десятичных приближений этих чисел с избытком.

П р и м е р 8 . Пусть $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = \dfrac{1}{3}$. Нетрудно убедиться, что действительное число $\sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{3}$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$0 \cdot 1 < \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} < 1 \cdot 2; \qquad \text{или} \qquad 0 < \frac{\sqrt{3}}{3} < 2 ;$$

$$0{,}3 \cdot 1{,}7 < \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} < 0{,}4 \cdot 1{,}8; \qquad 0{,}51 < \frac{\sqrt{3}}{3} < 0{,}72 ;$$

$$0{,}33 \cdot 1{,}73 < \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} < 0{,}34 \cdot 1{,}74; \qquad 0{,}5709 < \frac{\sqrt{3}}{3} < 0{,}5916 ;$$

$$0{,}333 \cdot 1{,}732 < \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} < 0{,}334 \cdot 1{,}733; \qquad 0{,}576756 < \frac{\sqrt{3}}{3} < 0{,}578822 ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Если хотя бы одно из действительных чисел α или β равно нулю, то $\alpha \cdot \beta = 0$. Если одно из этих чисел, например, $\alpha < 0$, то $-\alpha > 0$ и произведение $-\alpha \cdot \beta$ — определяется как выше. Тогда $\alpha \cdot \beta = -(-\alpha \cdot \beta)$.

Если оба действительные числа α и β отрицательные, то произведение $\alpha \cdot \beta$ определяется как произведение положительных чисел $-\alpha$ и $-\beta$:

$$\alpha \cdot \beta = (-\alpha) \cdot (-\beta).$$

Операция произведения действительных чисел также удовлетворяет законам коммутативности и ассоциативности:

1^0. Если α, β — действительные числа, то $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$;

2^0. Если α, β, γ — действительные числа, то $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \times \times (\beta \cdot \gamma)$.

Кроме того, операция произведения действительных чисел относительно операции сложения удовлетворяет закону дистрибутивности:

3^0. Если α, β, γ — действительные числа, то $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Числа α и β называются взаимно обратными, если $\alpha \cdot \beta = 1$. Число, обратное числу β, будем обозначать через $\frac{1}{\beta}$. Частным $\alpha : \beta$ от деления действительного числа α на действительное число β, $\beta \neq 0$ называется действительное число γ, которое удовлетворяет равенству $\beta \cdot \gamma = \alpha$. Другими словами, частное от деления α на β — это произведение чисел α и $\frac{1}{\beta}$.

П р и м е р 9. Пусть $\alpha = \sqrt{2}$ и $\beta = \sqrt{5}.$ Тогда:

$$\begin{array}{ll}
1{,}4 < \alpha < 1{,}5; & 2{,}2 < \beta < 2{,}3; \\
1{,}41 < \alpha < 1{,}42; & 2{,}23 < \beta < 2{,}24; \\
1{,}414 < \alpha < 1{,}415; & 2{,}236 < \beta < 2{,}237; \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Отсюда:

$$\begin{array}{ll}
\frac{1}{2{,}3} < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{2{,}2}; & 1{,}4 \cdot \frac{1}{2{,}3} < \alpha \cdot \frac{1}{\beta} < 1{,}5 \cdot \frac{1}{2{,}2}; \\
\frac{1}{2{,}24} < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{2{,}23}; & 1{,}41 \cdot \frac{1}{2{,}24} < \alpha \cdot \frac{1}{\beta} < 1{,}42 \cdot \frac{1}{2{,}23}; \\
\frac{1}{2{,}237} < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{2{,}236}; & 1{,}414 \cdot \frac{1}{2{,}237} < \alpha \cdot \frac{1}{\beta} < 1{,}415 \cdot \frac{1}{2{,}236}; \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

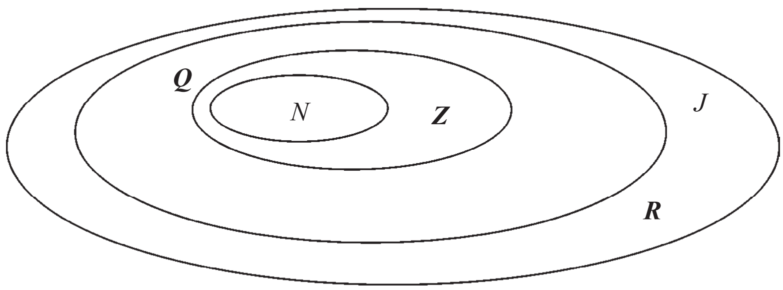
Таким образом, $0{,}6320 < \alpha : b < 0{,}6328$.

5. Развитие понятия числа. Понятие числа возникло из естественных нужд человека при работе с различными предметами. Для определения количества предметов необходим был их счет.

При счете предметов появились числа 1, 2, 3, 4, ... , которые называются натуральными числами. Кроме счета предметов требовалось еще и измерение. Результаты измерений часто выражаются дробями. Так появились положительные дроби вида $\frac{m}{n}$, где m, $n \in N$. Например, если отрезок AB можно разбить на m отрезков, каждый из которых равен n- й части единичного отрезка CD, то длина отрезка AB выражается дробью $\frac{m}{n}$. Позднее стали появляться различные потребности теоретического характера. Например, чтобы было возможно выполнение операции вычитания, стали необходимыми ноль и отрицательные числа (впервые отрицательные числа встречаются в работах китайских математиков II в. до н. э.).

После введения отрицательных чисел и нуля в математике стало возможным оперировать со всеми рациональными числами. Длину любого отрезка можно с любой степенью точности выразить с помощью положительного рационального числа. Но в теоретических исследованиях появляются отрезки, длины которых не выражаются рациональными числами. Например, длина диагонали квадрата со стороной, равной 1, не выражается рациональным числом. Поэтому возникла необходимость расширить множество рациональных чисел, присоединив к нему новые числа, которые называются иррациональными: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и т. д. Все рациональные и иррациональные числа в совокупности образуют множество действительных чисел.

Если N — множество всех натуральных чисел, Z — множество всех целых чисел, Q — множество всех рациональных чисел, J — множество всех иррациональных чисел, а R — множество всех действительных чисел, то верно соотношение $N \subset Z \subset Q \subset R$ и $J \subset R$, которое можно изобразить с помощью следующей диаграммы:



6. Модуль действительного числа. *Модуль* (абсолютное значение) действительного числа α обозначается через $|\alpha|$ и определяется следующим образом:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, \text{ если } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, \text{ если } \alpha < 0. \end{cases}$$

П р и м е р 10. Модуль числа -5 равен $|-5| = -(-5) = 5$.

Пусть на числовой прямой с началом координат O, число α представляется точкой A. Тогда длина отрезка OA равна $|\alpha|$, т. е. геометрически $|\alpha|$ — это длина отрезка с концами в начале координат и в точке, представляющей число α.

Свойства модуля действительного числа:

1^0. Для всех действительных чисел α верно неравенство $|\alpha| \geq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Если $\alpha = 0$, то $|0| = 0$. Пусть $\alpha > 0$. Тогда $|\alpha| = \alpha > 0$. Если же $\alpha < 0$, то $|\alpha| = -\alpha$. Но поскольку $\alpha < 0$, то $-\alpha > 0$. Отсюда $|\alpha| > 0$. Таким образом, во всех случаях $|\alpha| \geq 0$.

2^0. Для всех действительных чисел α и β верно равенство $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Рассмотрим следующие случаи:

а) Пусть $(\alpha = 0) \vee (\beta = 0)$. Тогда $|\alpha \cdot \beta| = 0 = |\alpha| \cdot |\beta|$.

б) Пусть $(\alpha < 0) \wedge (\beta > 0)$. Тогда $\alpha \cdot \beta < 0$. Следовательно, $|\alpha \cdot \beta| = -(\alpha \cdot \beta)$ и $|\alpha| \cdot |\beta| = (-\alpha) \cdot \beta = -(\alpha \cdot \beta)$. Отсюда $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

в) Случай $(\alpha > 0) \wedge (\beta < 0)$ доказывается аналогично случаю *б*).

г) Пусть $(\alpha < 0) \wedge (\beta < 0)$. Тогда $\alpha \cdot \beta > 0$ и $|\alpha \cdot \beta| = \alpha \cdot \beta$. Кроме того, $|\alpha| \cdot |\beta| = (-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha \cdot \beta$. Отсюда $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

д) Пусть $(\alpha > 0) \wedge (\beta > 0)$. Тогда $\alpha \cdot \beta > 0$. Следовательно, $|\alpha \cdot \beta| = \alpha \cdot \beta$ и $|\alpha| \cdot |\beta| = \alpha \cdot \beta$. Отсюда $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

3^0. Для всех действительных чисел α и β верно неравенство (неравенство треугольника) $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Доказательство проводится аналогично доказательству свойства 2^0. Для примера приведем доказательство в случае, когда $(\alpha > 0) \wedge (\beta < 0)$.

Пусть $|\alpha| \leq |\beta|$. Тогда $|\alpha + \beta| = |\beta| - |\alpha| \leq |\beta| + |\alpha| = |\alpha| + |\beta|$. Если же $|\alpha| \geq |\beta|$, то $|\alpha + \beta| = |\alpha| - |\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

7. Пропорция, производные пропорции. Процент и сложные проценты. Пусть a и b некоторые действительные числа, причем $b \neq 0$. Тогда число вида $\frac{a}{b}$ (т. е. $a : b$) называют отношением чисел a и b. Равенство двух отношений $a : b$ и $c : d$, т. е. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, называется *пропорцией*. Очевидно, если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{a\cdot k}{b\cdot k}=\frac{c}{d}$ и $\frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}}=\frac{c}{d}$, где $k\neq 0$.

Пусть дана пропорция $a : b = c : d$. Тогда числа a и d называются *крайними членами*, числа b и c — *средними членами пропорции.*

Основное свойство пропорции. Произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов пропорции, т. е. если $a : b = c : d$, то $a \cdot d = b \cdot c$.

Доказательство. Пусть $a : b = c : d$. Тогда $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, где $b\neq 0$ и $d\neq 0$ (иначе это равенство не имеет смысла). Умножая обе части этого равенства на число $b \cdot d$, имеем $\frac{a}{b}\cdot(b\cdot d)=\frac{c}{d}\cdot(b\cdot d)$. Откуда $a \cdot d = b \cdot c$.

Верно и обратное утверждение. Действительно, если $a \cdot d = b \cdot c$, причем $b\neq 0$ и $d\neq 0$, то разделив последнее равенство на $b \cdot d$, получим $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Таким образом, $a : b = c : d$ тогда и только тогда, когда $a \cdot d = b \cdot c$.

С помощью основного свойства пропорции можно доказать следующие пропорции, которые называются *производными пропорциями*.

Пусть $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Тогда верны следующие пропорции:

1. $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$;
2. $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$;
3. $\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$;
4. $\frac{ma+nb}{pa+qb}=\frac{mc+nd}{pc+qd}$.

Для примера докажем 4-ю пропорцию. В силу основного свойства достаточно доказать, что $(ma + nb)\cdot(pc+qd) = (pa+qb)\times\times(mc+nd)$. Раскрывая скобки слева, получим:

$$ma \cdot pc + nb \cdot pc + ma \cdot qd + nb \cdot qd = ma \cdot pc + np \cdot bc + \\ + mq \cdot ad + nb \cdot qd = mc \cdot ap + np \cdot ad + mq \cdot bc + nb \cdot qd = \\ = mc \cdot (ap + qb) + nd \cdot (pa + bq) = (pa + qb) \cdot (mc + nd).$$

На практике часто приходится решать задачи, связанные с понятием процента. Обычно такие задачи решаются посредством составления пропорции между данными. Задачи, связанные с понятием процента, относятся к текстовым задачам, которые мы более подробно рассмотрим в главе VI, § 16.

Введем понятие процента и рассмотрим несколько примеров на вычисление процентов.

Сотая часть числа называется *процентом* и обозначается символом %. Запись 9 % читается как "9 процентов". Например, 40 % от числа 35 составляет $\frac{40}{100}$ его частей и, следовательно, равно $35 \cdot \frac{40}{100} = 14$.

П р и м е р 11. Какой процент числа a равен числу b?

Р е ш е н и е : $\frac{a}{100}$ есть 1 % числа a. Пусть x % числа a равно числу b. Тогда $x \cdot \frac{a}{100} = b$ или $x = \frac{b}{a} \cdot 100.$ Этот процесс можно схематизировать следующим образом:

$$\begin{array}{c} a — 100\% \\ b — x\% \\ \hline a \cdot x = b \cdot 100 \end{array}.$$

Откуда $x = \frac{b}{a} \cdot 100.$ Такая схема называется *составлением пропорции*.

П р и м е р 12. Найти число, p % которого равно числу b.

Р е ш е н и е: составим схему:

$$\begin{array}{c} b — p\% \\ x — 100\% \\ \hline x \cdot p = b \cdot 100 \end{array}.$$

Отсюда $x = \frac{b \cdot 100}{p}$.

П р и м е р 13. Найти число, полученное увеличением числа a на p %.

Р е ш е н и е:

$$\frac{\begin{array}{l} a — 100\% \\ x — (100+p)\% \end{array}}{100 \cdot x = a \cdot (100+p)}.$$

Следовательно, $x = \frac{a \cdot (100+p)}{100}$ или $x = a + \frac{a}{100} \cdot p$. Отсюда $x = a \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)$.

П р и м е р 14. Найти число, полученное увеличением числа a на p % n раз.

Р е ш е н и е . Если к числу a прибавить его p % n раз, то получится число $b = a + n \cdot \left(\frac{a}{100} \cdot p\right)$ или $b = a \cdot \left(1+\frac{n \cdot p}{100}\right)$.

В этом случае говорят, что число b получено по *простому проценту*.

Прибавим к числу a его p %. Тогда получим число $b_1 = a + \frac{a}{100} \cdot p = a \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)$. Теперь к полученному числу b_1 прибавим его p %. Получим $b_2 = a \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) + a \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) \cdot \frac{p}{100}$ или $b_2 = a \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ и т. д. Повторив этот процесс n раз, получим число $b_n = a \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^n$. В этом случае говорят, что число b_n получено из числа a с помощью *сложного процента*.

Вопросы и задания

1. Существует ли рациональное число, квадрат которого равен 3?
2. Какие числа называются иррациональными числами?
3. Объяснить на примерах, как можно сравнить иррациональные числа?
4. Как представляются иррациональные числа на числовой прямой?
5. Определить модуль действительного числа.
6. Сформулировать свойства модуля.
7. Объяснить сложение, умножение действительных чисел.
8. Дать определение целой и дробной частей действительного числа.
9. Сформулировать основное свойство пропорции.
10. Привести несколько примеров на производные пропорции.
11. Что такое процент?
12. Объяснить простой и сложный проценты.

Упражнения

1. Доказать, что для любых различных простых чисел p и q число $\sqrt{p \cdot q}$ — иррациональное число.

2. Доказать, что сумма рационального и иррационального чисел есть иррациональное число.

3. Доказать, что произведение ненулевого рационального числа на иррациональное число есть иррациональное число.

4. Привести пример двух иррациональных чисел, произведение которых есть рациональное число. Построить точки на числовой прямой, изображающие следующие иррациональные числа: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$.

5. Найти три первые десятичные приближения с недостатком числа $\sqrt{3}$.

6. Найти с точностью до 0,001:

а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; *б*) $\frac{3}{4}-\sqrt{5}$.

7. Найти четыре первые десятичные приближения с недостатком для следующего действительного числа: $\sqrt{3}+\sqrt{7}$.

8. Найти приближенные значения следующих чисел с точностью до 0,01:

а) (0,023) : (0,041); *в*) $0,(3):\sqrt{5}$;

б) $\sqrt{2}:1,3657$; *г*) $(-\sqrt{3}):\sqrt{2}$.

9*. Доказать иррациональность следующих чисел:

а) $\sqrt[3]{2}$; *в*) $\sqrt{p}$, где p — простое число; *д*) $\lg 4$;

б) $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$; *г*) $\sqrt{3k+2}$, где $k \in N$; *е*) $\lg 2+\lg 3$.

10. Освободить знаменатель от иррациональности:

а) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; *б*) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; *в*) $\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

---

11. Доказать, что для двух различных рациональных чисел a и b существует хотя бы одно рациональное число x такое, что $a<x<b$.

12. Привести пример двух иррациональных чисел, сумма которых есть рациональное число.

13. Найти три первые десятичные приближения с недостатком числа $-\sqrt{3}$.

14. Найти с точностью до 0,001:

а) $\sqrt{2}+\frac{5}{8}$; *б*) $\frac{11}{9}-\sqrt{5}$.

15. Найти четыре первых десятичных приближений с недостатком для следующего действительного числа: $\sqrt{3}-\sqrt{7}$.

16. Найти приближенные значения следующих чисел с точностью до 0,01:

а) $\sqrt{5}-\frac{5}{6}$; *б*) $\frac{1}{4}-\sqrt{6}$; *в*) $\sqrt{6-\frac{3}{8}}$; *г*) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$.

17*. Доказать иррациональность следующих чисел:

а) $\sqrt{3}+1$; *б*) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; *в*) $\sqrt{333}$; *г*) lg 2; *д*) lg 5.

18*. Освободить знаменатель от иррациональности:

а) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$; *б*) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1}$; *в*) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}+1}$.

19. Найти 40 % числа, если известно, что 28 % от этого числа равно 84.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Найти все остатки от деления нечетного натурального числа на 8.

2. Написать 5 последовательных составных чисел.

3. Найти несколько натуральных чисел n, для которых числа $n+10$, $n+14$ являются простыми числами.

4. Найти простое число p такое, что $2p^2+1$ также является простым числом.

5. Доказать, что если $p+5$ — простое число, то $p+10$ не может быть простым.

6. Доказать методом математической индукции, что для любого натурального числа n число 15^n при делении на 7 дает остаток 1.

7. Доказать, что все числа вида $2^{2n}+1$ ($n = 2, 3, ...$) при делении на 10 дают остаток 7.

8. Доказать, что НОД $(2n, 2n + 2) = 2$.

9. Доказать, что НОК $(n, n + 1) = n\,(n + 1)$.

10. Найти НОД $(5a + 3b, 13a + 8b)$, если НОД $(a, b) = d$.

11. Доказать, что обе части сравнения можно делить на число, взаимно простое с модулем.

12. Доказать, что обе части сравнения и модуль можно делить на одно и то же число.

13. Доказать, что если $a \equiv 1 \pmod{m}$, то для любого натурального числа n, $a^n \equiv 1 \pmod{m}$.

14. Найти все значения x, если $x \equiv 0 \pmod{3}$.

15. Доказать, что $(a - b)^p \equiv a^p - b^p \pmod{p}$.

16*. Найти значения следующих выражений:

а) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{13} - \sqrt{3}}$; *г)* $\sqrt[3]{(1 - \sqrt{2})^3}$; *ж)* $\sqrt{6,3 \cdot 1,8}$.

б) $\dfrac{6}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$; *д)* $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$;

в) $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$; *е)* $\sqrt[3]{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^3}$;

17. Найти одно рациональное число, которое лежит между числами:

а) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{2} + 1$; *в)* 4,63479... и 4,63497... ;

б) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$; *г)* $\sqrt{5}$ и $\sqrt{2} + 1$.

18. Представить следующие периодические дроби в виде обыкновенной дроби:

а) 0,(32); *в)* 0,7(81);

б) 0,7(9); *г)* 0,56(3).

19. Построить точки на числовой прямой, изображающие следующие числа:

а) $\sqrt{3} - 1$; *в)* $\dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{2}$;

б) $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$; *г)* $2\sqrt{7}$.

20. Цену товара повысили на 10 %, затем новую цену повысили на 20 %. На сколько процентов в итоге повысилась первоначальная цена товара?